

Total number of pages - 16

30T MATH

2020

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

Q. No. 1 (a-j) carries 1 mark each

$$1 \times 10 = 10$$

Q. Nos. 2 -13 carry 4 marks each

$$4 \times 12 = 48$$

Q. Nos. 14-20 carry 6 marks each

$$6 \times 7 = 42$$

$$\text{Total} = 100$$

Contd.

1. Answer the following questions :

1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Determine the relation R on the set of whole numbers ≤ 10 defined by

$$R = \{ (x, y) \mid 2x + 3y = 12 \}.$$

10 তকৈ সৰু বা সমান পূৰ্ণসংখ্যাৰ সংহতিত R সম্বন্ধটো এনেধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ
 $R = \{ (x, y) \mid 2x + 3y = 12 \}$ । সম্বন্ধটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Write the principal value of

$$\cos^{-1} \left[\cos \left(\frac{-16\pi}{15} \right) \right].$$

$$x = \frac{12 - 3x}{2}$$

$\cos^{-1} \left[\cos \left(\frac{-16\pi}{15} \right) \right]$ ৰ মুখ্য মান লিখা।

$$\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right)$$

$$[0, \pi]$$

- (c) Let $A = [a_{ij}]$ is a square matrix of order 2 where $a_{ij} = i^2 - j^2$.

Then A is

(i) Skew-symmetric matrix

(ii) Symmetric matrix

(iii) Diagonal matrix

(iv) None of these.

$$a_{11} = 1^2 - 1^2 = 0$$

$$a_{12} = 1^2 - 2^2 = -3$$

$$a_{21} = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$a_{22} = 2^2 - 2^2 = 0$$

ধৰা হ'ল $A = [a_{ij}]$ এটা 2 ক্ৰমৰ বৰ্গ মৌলকক্ষ য'ত $a_{ij} = i^2 - j^2$ । তেন্তে A এটা

(i) বিষম-সমমিত মৌলকক্ষ

(ii) সমমিত মৌলকক্ষ

(iii) বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ

(iv) এটাও নহয়।

$$a_{21} = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$\sqrt{x^2+a^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln^{-1} \frac{x}{a}$$

- (d) Find the derivative of x^3 with respect to x^2 .

x^2 সাপেক্ষে x^3 ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

- (e) Find the equation of the tangent to the curve $y = f(x)$ at (x_0, y_0) , if $\frac{dy}{dx}$ does not exist at this point. 1

যদি $y = f(x)$ বক্ৰৰ (x_0, y_0) বিন্দুত $\frac{dy}{dx}$ স্থিত নহয়, তেন্তে বক্ৰডালৰ এই বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ লিখা।

- (f) If $\sec^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1} y$ ($|x| \geq 1, |y| \geq 1$), then find the value of.

$$\cos^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) + \cos^{-1} \left(\frac{1}{y} \right). \quad 1$$

যদি $\sec^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1} y$ ($|x| \geq 1, |y| \geq 1$),

তেন্তে $\cos^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) + \cos^{-1} \left(\frac{1}{y} \right)$ ৰ মান উলিওৱা।

- (g) Write the direction cosines of the vector $\hat{j}$. 1

$\hat{j}$ ভেক্টৰৰ দিশাংকবোৰ লিখা।

- (h) Write the order of the differential equation representing the family of curves given by

$$y = a \sin(x+b), \text{ where } a \text{ and } b \text{ are arbitrary constants.} \quad 1$$

$y = a \sin(x+b)$ য'ত a আৰু b যাদৃচ্ছিক ধ্ৰুৱক, সমীকৰণটোৱে বুজোৱা অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম লিখা।

- (i) The projections of a line on the axes are 3, 4 and $2\sqrt{6}$. Find the length of the line. 1

এডাল ৰেখাৰ অক্ষকেইডালত প্ৰক্ষেপ হ'ল 3, 4 আৰু $2\sqrt{6}$ । ৰেখাডালৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

- (j) If $x = \phi(t)$, then find $\int f(x) dx$. 1

$x = \phi(t)$ হ'লে $\int f(x) dx$ নিৰ্ণয় কৰা।

2. A relation R in the set $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$ is given by $R = \{(a, b) : |a - b| \text{ is a multiple of } 4\}$. Prove that R is an equivalence relation. Find the set of all elements related to 1. 4

দেখুওৱা যে $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$ সংহতিত সংজ্ঞাবদ্ধ সম্বন্ধ

$R = \{(a, b) : |a - b| \text{ 4 অৰ এটা গুণিতক } \}$ সমতুল্য সম্বন্ধ। 1ৰ লগত যুক্ত মৌলবোৰৰ সংহতি উলিওৱা।

OR / অথবা

Let $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ is defined by $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. Show that f is a bijective function. 2+2=4

ধৰা হ'ল $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, য'ত $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ। দেখুওৱা যে f এটা একৈকী আচ্ছাদক ফলন।

3. Solve :

সমাধান করা :

$$\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}.$$

OR/অথবা

If $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ and $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, where $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$; then find the value of $\alpha - \beta$.

4

যদি $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ আর $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, যত $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$; তেস্তে $\alpha - \beta$ ব মান নির্ণয় করা।

4. Show that

দেখুওরা যে

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2.$$

OR/অথবা

35 3
25 3
21 8
25 3
25 3
25 3

যদি $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ and (আর) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, then

examine whether the matrix $A^2 - 2B$ is singular.

4

তেস্তে $A^2 - 2B$ মৌলকক্ষটো অপ্রতিম হয়নে পরীক্ষা করা।

5. Find all points of discontinuity of f , where

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

4

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{যদি } x \neq 0 \\ 0, & \text{যদি } x = 0 \end{cases}$$

অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ ফলনটোৰ বিচ্ছিন্নতাৰ বিন্দুসমূহ উলিওৱা।

6. Find $\frac{dy}{dx}$, if

$$2+2=4$$

$\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা, যদি

(a) $y^x = x^y$

(b) $\cos y = x \cos (a + y).$

7. Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰা :

(a) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$

$$\frac{(x+1+2)(x+1-2)}{(x+1)(x+1)}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1 \\ (x+1)^2 - 4 \\ \Rightarrow (x+1)^2 - 2^2 \end{aligned}$$

OR/অথবা

(b) $\int \frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}} dx$

$t = 1 + \cos x$
 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$
 $\Rightarrow dx = \frac{-dt}{\sin x}$

8. Evaluate :

মান নির্ণয় করা :

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$

$\frac{1}{t} \cdot \sin x$
 $\frac{1}{1 + \cos x}$

OR/অথবা

(b) $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x) dx$

$t = (1 + \cos x)$
 $\Rightarrow$

9. If $x = a(\theta + \sin \theta)$ and $y = a(1 - \cos \theta)$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $\theta = 0$.

যদি $x = a(\theta + \sin \theta)$ আৰু $y = a(1 - \cos \theta)$,

তেন্তে $\theta = 0$ ত $\frac{d^2y}{dx^2}$ ৰ মান নির্ণয় কৰা।

OR / অথবা

State Rolle's theorem and give geometrical interpretation of the theorem. 2+2=4

ৰ'ল'ৰ উপপাদ্যৰ সংজ্ঞা লিখা আৰু ইয়াৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দৰ্শোৱা।

10. Solve the differential equation :

অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

4

$y = 0$ when (যেতিয়া) $x = 1$.

OR / অথবা

$$(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1 - x^2}.$$

4

11. If $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$, find the interval for which $f(x)$ is (2)

(i) strictly increasing

(ii) strictly decreasing.

30T MATH

Handwritten calculations:

$$\begin{aligned} & 3(1+2)(1-6) \\ & 3 \times 3 \times (-5) \\ & 3 \times (-15) = -45 \\ & 3(1+2)(1-6) \\ & 3 \times 3 \times (-5) \\ & 3 \times (-15) = -45 \\ & 2+2=4 \\ & 2x-6x+2x-12 \\ & 2x(2-6)+2x(-6) \end{aligned}$$

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ ৰ দ্বাৰা নিৰ্দিষ্ট ফলনটো কোন অন্তৰালত

(i) সতত বৰ্দ্ধমান

(ii) সতত হ্ৰাসমান

উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the area of the largest rectangle that can be formed having a perimeter of 40 meters. 4

এটা আয়তক্ষেত্ৰৰ পৰিসীমা 40 মিটাৰ। আয়তক্ষেত্ৰটোৰ কালি উলিওৱা যেতিয়া ই গৰিষ্ঠ।

12. Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} - \vec{b}$, where $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$. 4

$\vec{a} + \vec{b}$ আৰু $\vec{a} - \vec{b}$ ভেক্টৰৰ লম্ব হোৱাকৈ এটা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা য'ত $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ আৰু $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$.

OR / অথবা

Let $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. Find a vector $\vec{d}$ which is perpendicular to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$ and $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$. 4

ধৰা হ'ল $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ আৰু $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. এটা ভেক্টৰ $\vec{d}$ নিৰ্ণয় কৰা য'ত $\vec{d}$; $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ ওপৰত লম্ব আৰু $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$.

13. Bag A contains 6 red and 4 white balls; bag B contains 4 red and 6 white balls and bag C contains 5 red and 5 white balls respectively. A bag is selected at random and a ball is drawn from the selected bag. If the ball is found to be red, find the probability that the ball is drawn from bag A. 4

যথাক্রমে মোনা A ত ৬টা বগা আৰু ৪টা বগা বল, মোনা B ত ৪টা বগা আৰু ৬টা বগা আৰু মোনা C ত ৫টা বগা আৰু ৫টা বগা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন মোনাৰ পৰা এটা বল লোৱা হ'ল। যদি বলটো বগা হয়, বলটো মোনা A ৰ পৰা লোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

OR/ অথবা

A fair coin is tossed 10 times. Find the probability of getting exactly five heads. 4

এটা নিখুঁত মুদ্ৰা ১০বাৰ টছ কৰা হ'ল। ঠিক পাঁচটা মুণ্ডপ্ৰাপ্ত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

14. Using matrix method solve the following system of linear equations : 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

মৌলিকক্ষীয় পদ্ধতিৰে তলৰ বৈখিক সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ সমাধান উলিওৱা :

$$(A + 3I)$$

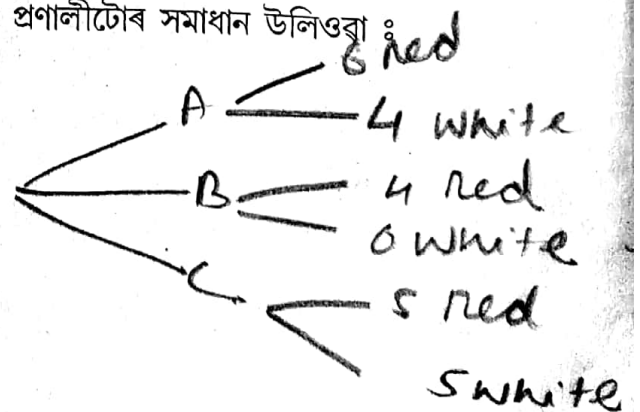
$$= 4$$

$$4 \quad -5$$

$$x - y + z = 4$$

$$2x + y - 3z = 0$$

$$x + y + z = 2$$



OR/ অথবা

Using elementary transformation find the inverse of the following matrix :

মৌলিক প্রক্রিয়া প্রয়োগ কৰি তলৰ মৌলকক্ষটোৰ প্ৰতিলোম মৌলকক্ষ উলিওৱা :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Handwritten notes for matrix inversion:

$$\frac{1}{2x} \times \frac{1}{2x} = \frac{1}{4x^2}$$

$$\frac{1}{2x} \times \frac{1}{2x} = -1$$

$$\frac{1}{2x} \times \frac{1}{2x} = 1$$

15. Prove that the curves $x = y^2$ and $xy = k$ cut at right angles if $8k^2 = 1$.

প্ৰমাণ কৰা যে $x = y^2$ আৰু $xy = k$ বক্ৰই লম্বভাৱে কটাকটি কৰে যদি $8k^2 = 1$.

Handwritten notes for problem 15:

$$x = y^2$$

$$\Rightarrow 1 = 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$$xy = k$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

OR/ অথবা

Handwritten notes for problem 15:

$$\frac{1}{2x} \times \frac{1}{2x} = \frac{1}{4x^2}$$

$$\frac{1}{2x} \times \frac{1}{2x} = -1$$

$$\frac{1}{2x} \times \frac{1}{2x} = 1$$

Find the absolute maximum and absolute minimum values of the function f given by $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

Handwritten notes for problem 16:

$$f(x) = \cos^2 x + \sin x$$

$$f'(x) = -2\cos x \sin x + \cos x$$

$$f'(x) = \cos x (1 - 2\sin x)$$

$$f'(x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$1 - 2\sin x = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

16. Find the area of the region enclosed by the parabola $x^2 = y$, the line $y = x + 2$ and the x-axis.

$x^2 = y$ অধিবৃত্ত, $y = x + 2$ ৰেখা আৰু x -অক্ষই আগুৱা ক্ষেত্ৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Using integration find the area of the region bounded by the triangle whose vertices are $(1, 0)$, $(2, 2)$ and $(3, 1)$. 6

অনুকলন ব্যৱহাৰ কৰি $(1, 0)$, $(2, 2)$ আৰু $(3, 1)$ শীৰ্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্ৰিভুজটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

17. Find the vector equation of the line passing through the point $(1, 2, 1)$ and perpendicular to the plane $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 10$. 6

$(1, 2, 1)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 10$ সমতলখনৰ লম্ব হোৱা ৰেখাডালৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

ভ.ক. = ৬

OR / অথবা

Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the planes $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ and the point $(1, 1, 1)$. 6

$\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ আৰু $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = -5$ সমতলদুখনে কটাকটি কৰা ৰেখাৰ আৰু $(1, 1, 1)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলখনৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

18. The two adjacent sides of a parallelogram are $(2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k})$ and $(\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$. Find the unit vector parallel to its diagonal. Also find the area of the parallelogram. 6

এটা সামান্তৰিকৰ দুটা সন্নিহিত বাহু হ'ল $(2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k})$ আৰু $(\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$ । ইয়াৰ কৰ্ণৰ সমান্তৰাল একক ভেক্টৰ উলিওৱা। সামান্তৰিকটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

OR/ অথবা

For any two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, prove that

6

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

যিকোনো দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

19. Solve graphically the following linear programming problem :

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ বৈখিক প্ৰগ্ৰেমিং সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা :

Maximize or Minimize

$$Z = x + 2y$$

subject to constraints

$$x + 2y \geq 100$$

$$2x - y \leq 0$$

$$2x + y \leq 200$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$Z = x + 2y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা য'ত

$$x + 2y \geq 100$$

$$2x - y \leq 0$$

$$2x + y \leq 200$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

OR / অথবা

Maximize

$$Z = 1000x + 600y$$

subject to constraints

$$x + y \leq 200$$

$$x \geq 20$$

$$y \geq 4x$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

6

$Z = 1000x + 600y$ ৰ সৰ্বোচ্চ মান উলিওৱা য'ত

$$x + y \leq 200$$

$$x \geq 20$$

$$y \geq 4x$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

20. Two numbers are selected at random (without replacement) from the first six positive integers. Let X denotes the larger of the two numbers. Find mean of X .

6

প্রথম ছয়টা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পৰা পুনৰস্থাপন নকৰাকৈ যাদৃচ্ছিকভাৱে দুটা সংখ্যা বাছনি কৰা হ'ল। X য়ে প্ৰাপ্ত সংখ্যা দুটাৰ ভিতৰত ডাঙৰটোক সূচালে X ৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

OR/ অথবা

How many times a fair coin must be tossed so that the probability of having at least one head is more than 90% ? 6

এটা নিখুঁত মুদ্রা কিমান বাৰ টছ কৰিব লাগিব যাতে কমেও এবাৰ মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা 90% তকৈ বেছি হয়?

— × —