

32T MATH

2022

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

Q. No. 1 (a-j) carries 1 mark each	$1 \times 10 = 10$
Q. Nos. 2-13 carry 4 marks each	$4 \times 12 = 48$
Q. Nos. 14-20 carry 6 marks each	$6 \times 7 = 42$
	<hr/>
	Total = 100

Contd.

1. Answer the following questions :

1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Give an example of a column matrix which is also a row matrix.

এটা স্তম্ভ মৌলকক্ষৰ উদাহৰণ দিয়া যিটো শাৰী মৌলকক্ষও হয়।

(b) “Diagonal elements of a skew-symmetric matrix are always zero” — Why?

“বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ বিকৰ্ণ মৌলবোৰ সদায় শূন্য” — কিয়?

(c) Let $f(x) = [x]$, where $[x]$ is a greatest integer function and $g(x) = x$. Find the value of $(f \circ g)(-\frac{1}{3})$.

ধৰা হ'ল $f(x) = [x]$, য'ত $[x]$ হ'ল গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলন আৰু $g(x) = x$. $(f \circ g)(-\frac{1}{3})$ -ৰ মান উলিওৱা।

(d) Differentiate $\sin x$ with respect to e^x .

e^x -ৰ সাপেক্ষে $\sin x$ -ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

(e) Write down the value of $\int_{-2}^2 |x| dx$.

$\int_{-2}^2 |x| dx$ -ৰ মান লিখা।

(f) Find the order of the differential equation

$$\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)^5 + \sin(y'') = 0.$$

$$\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)^5 + \sin(y'') = 0 \text{ অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম নিৰ্ণয় কৰা।}$$

(g) Find the principal value of $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \text{ৰ মুখ্যমান উলিওৱা।}$$

(h) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰ কৰা :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(i) What is the direction cosine of X-axis ?

X-অক্ষৰ দিশাংক কিমান ?

(j) Let A and B be any two given sets. If $f : A \rightarrow B$ is a onto function, then find the range of f .

পৰা হ'ল A আৰু B যিকোনো দুটা সংহতি। যদি $f : A \rightarrow B$ এটা আচ্ছাদক ফলন হয়, তেন্তে f -ৰ পৰিসৰ উলিওৱা।

2. Define an equivalence relation. Check whether the following relation R defined on the set of integers \mathbb{Z} is an equivalence relation or not, where $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ is an integer}\}$. 1+3=4

সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ সংজ্ঞা দিয়া। \mathbb{Z} -ত সংজ্ঞাবদ্ধ তলৰ সম্বন্ধ R টো সমতুল্যতা সম্বন্ধ হ'বনে নহ'ব পৰীক্ষা কৰা, য'ত $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ এটা অখণ্ড সংখ্যা}\}$ ।

OR / অথবা

Show that the function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined as $f(x) = 2x - 3$ is invertible. Also find the inverse of f . 4

দেখুওৱা যে $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -ত সংজ্ঞাবদ্ধ $f(x) = 2x - 3$ ফলনটো প্ৰতিলোমনীয়। f -ৰ প্ৰতিলোমও উলিওৱা।

3. Show that 4
দেখুওৱা যে

$$\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{8}{17} = \cos^{-1} \frac{84}{85}$$

OR / অথবা

Solve the following equation : 4

তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$2 \tan^{-1} (\cos x) = \tan^{-1} (2 \operatorname{cosec} x)$$

4. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, then find the value λ and μ

such that $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$, where 0 is zero matrix of order 2.

4

যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ আৰু $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তেন্তে λ আৰু μ -ৰ মান উলিওৱা যাতে

$A^2 + \lambda A + \mu I = 0$, য'ত 0 হৈছে 2 ঘাতৰ শূন্য মৌলিকম্ফ।

OR / অথবা

Determine the value of a for which the system is consistent. 4

a -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে প্ৰণালীটো সুসংগত হয়।

$$x + y + z = 1$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$ax + ay + 2az = 4$$

5. Find the value of k so that the following function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 100x}{99}, & \text{if } x \neq 0 \\ k, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$.

4

$$\text{যদি } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 100x}{99}, & \text{যদি } x \neq 0 \\ k, & \text{যদি } x = 0 \end{cases}$$

ফলনটো $x = 0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে k ৰ মান নির্ণয় কৰা।

6. Find $\frac{dy}{dx}$ if —

2+2=4

উলিওৱা $\frac{dy}{dx}$ যদিহে —

(i) $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

(ii) $y = e^{\cos x}$

7. Prove that the greatest integer function defined by

$$f(x) = [x], 0 < x < 2 \text{ is not differentiable at } x = 1.$$

4

প্রমাণ কৰা যে $f(x) = [x], 0 < x < 2$ -ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাবদ্ধ গৰিষ্ঠ অখণ্ড ফলনটো $x = 1$ বিন্দুত অৱকলনীয় নহয়।

OR / অথবা

If (যদি) $e^y(x+1) = 1$, show that (দেখুওৱা য়ে)

4

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

8. Evaluate :

2+2=4

মান নিৰ্ণয় কৰা :

(a) $\int \left(x^{3/2} + 2e^x - \frac{1}{x} \right) dx$

(b) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

OR / অথবা

Evaluate :

4

মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$$

9. Find the equations of the tangent and normal to the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 2 \text{ at } (1, 1).$$

2+2=4

$x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ বক্ৰৰ (1, 1) বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

OR / অথবা

Find the local maxima and local minima, if any, of the function

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15.$$

2+2=4

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ ফলনটোৰ স্থানীয় গৰিষ্ঠ আৰু স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা, যদি আছে।

10. A particle moves along the curve $6y = x^3 + 2$. Find the point(s) on the curve at which the y -coordinate is changing 8 times as fast as the x -coordinate. 4

এটা কণিকা $6y = x^3 + 2$ বক্ৰৰে চলাচল কৰে। বক্ৰটোৰ সেই বিন্দু (বোৰ) উলিওৱা য'ত x -স্থানাংক তকৈ 8 গুণ বেছি বেগত y -স্থানাংক পৰিৱৰ্তিত হয়।

OR / অথবা

Show that the function $f(x) = \cos 3x$ is neither strictly increasing nor decreasing on $(0, \pi/2)$. 4

দেখুওৱা যে $f(x) = \cos 3x$ ফলনটো $(0, \pi/2)$ -ত সতত বধৰ্মান বা হ্রাসমান এটাও নহয়।

11. Evaluate $\int_0^5 (x+1) dx$ as the limit of a sum. 4

যোগফলৰ চৰম মান হিচাপে $\int_0^5 (x+1) dx$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Evaluate :

4

মান নির্ণয় কৰা :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

12. Show that the vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ is equally inclined to the axes OX , OY and OZ . 4

দেখুওৱা যে $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টৰটো OX , OY আৰু OZ অক্ষৰ লগত সমভাৱে হেলনীয়া হয়।

OR / অথবা

State the triangle inequality for any two vectors and prove it.

1+3=4

যিকোনো দুটা ভেক্টৰৰ বাবে ত্ৰিভুজ অসমিকাতো লিখি প্ৰমাণ কৰা।

13. Probability of solving a specific problem independently by A and B are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ respectively. If both try to solve the problem independently, find the probability that — 2+2=4

(i) the problem is solved

(ii) exactly one of them solves the problem.

A আৰু B য়ে এটা বিশেষ সমস্যা স্বতন্ত্রভাৱে সমাধান কৰাৰ সম্ভাৱিতা ক্ৰমে $\frac{1}{2}$ আৰু $\frac{1}{3}$ । যদি সমস্যাটো সমাধানৰ বাবে উভয়ে স্বতন্ত্রভাৱে চেষ্টা কৰে, তেন্তে সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যাতে —

(i) সমস্যাটো সমাধান হয়

(ii) তেওঁলোকৰ ঠিক এজনে সমস্যাটোৰ সমাধান আগবঢ়ায়।

OR / অথবা

Let X denote the number of hours Rita studies during a randomly selected school day. The probability that X can take the values x , has the following form :

$$P(X=x) = \begin{cases} 0.1, & \text{if } x=0 \\ kx, & \text{if } x=1 \text{ or } 2 \\ k(5-x), & \text{if } x=3 \text{ or } 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where k is an unknown constant.

- (a) Find the value of k .
- (b) What is the probability that Rita studies at least two hours, exactly two hours and at most two hours ? $1+1+1+1=4$

যাদৃচ্ছিকভাৱে নিৰ্বাচন কৰা স্কুলীয়া দিনত কোনোবা এদিন ৰীতাৰ অধ্যয়ন কৰা মুঠ ঘণ্টাৰ সংখ্যাটো X ৰে বুজোৱা হ'ল। X -ৰ মান x হোৱাৰ সম্ভাৱিতাক নিম্নোক্ত ৰূপত প্ৰকাশ কৰা হৈছে :

$$P(X=x) = \begin{cases} 0.1, & \text{যদি } x = 0 \\ kx, & \text{যদি } x = 1 \text{ বা } 2 \\ k(5-x), & \text{যদি } x = 3 \text{ বা } 4 \\ 0, & \text{অন্যথা} \end{cases}$$

য'ত k এটা অজ্ঞাত প্ৰংক।

- (a) k -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।
- (b) ৰীতাই কমপক্ষে দুই ঘণ্টা, সঠিক দুই ঘণ্টা আৰু সৰ্বোচ্চ দুই ঘণ্টা অধ্যয়ন কৰাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ কিমান ?

14. Find the minors and cofactors of the elements of the determinant

3+3=6

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} \text{ নিৰ্ণায়কটোৰ মৌলবোৰৰ অনুৰাশি আৰু সহৰাশি উলিওৱা।}$$

OR / অথবা

Find A^{-1} by using elementary transformation, where —

6

মৌলিক ৰূপান্তৰ প্ৰক্ৰিয়া প্ৰয়োগ কৰি A^{-1} উলিওৱা য'ত —

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

15. Define homogeneous function of degree n . Solve the differential equation 1+5=6

$$(x^2 + xy) dy = (x^2 + y^2) dx$$

n মাত্রাৰ সমমাত্রিক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

$(x^2 + xy) dy = (x^2 + y^2) dx$ অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা।

OR / অথবা

- (i) Solve the differential equation : 3

অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা :

$$x \frac{dy}{dx} + (2x + 1)y = xe^{-2x}$$

- (ii) Form the differential equation of the family of circles touching the X -axis at origin. 3

মূলবিন্দুত X -অক্ষক স্পৰ্শ কৰা বৃত্তৰ পৰিয়াল এটাৰ অৱকল সমীকৰণটো গঠন কৰা।

16. Integrate :

অনুকলন কৰা :

(a) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} dx$

(b) $\int x \sin^{-1} x dx$

2+4=6

OR / অথবা

$$(a) \int \left(\frac{2 \cos x - 3 \sin x}{6 \cos x + 4 \sin x} \right) dx$$

$$(b) \int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 1} dx$$

2+4=6

17. For any three vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, prove that

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

6

যিকোনো তিনটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ -র বাবে প্রমাণ করা যে

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}।$$

OR / অথবা

Three vectors \vec{a}, \vec{b} and \vec{c} satisfy the condition $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
Evaluate the quantity

$$\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} \quad \text{if } |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4 \text{ and } |\vec{c}| = 2.$$

6

\vec{a}, \vec{b} আৰু \vec{c} ভেক্টর তিনটাই $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ চৰ্ত সিদ্ধ কৰে।

$\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যদিহে $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4$ আৰু $|\vec{c}| = 2$ হয়।

18. Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}).$$

6

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ আৰু}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) \text{ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ নূন্যতম দূৰত্ব উলিওৱা।}$$

OR / অথবা

Find the equation of the plane passing through the point $(-1, 3, 2)$ and perpendicular to each of the planes $x + 2y + 3z = 5$ and $3x + 3y + z = 0$.

6

$(-1, 3, 2)$ বিন্দুৰে যোৱা আৰু $x + 2y + 3z = 5$ আৰু $3x + 3y + z = 0$ সমতল দুখনৰ প্ৰত্যেকৰে লম্বভাৱে থকা সমতলখনৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

19. Minimize $Z = 3x + 5y$

$$\text{subject to } x + 3y \geq 3$$

$$x + y \geq 2$$

$$x, y \geq 0$$

6

$$x + 3y \geq 3$$

$$x + y \geq 2$$

$x, y \geq 0$ সীমাবদ্ধতা সাপেক্ষে $Z = 3x + 5y$ -ৰ সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা।

OR / অথবা

Minimise and Maximise $Z = 5x + 10y$
subject to

$$x + 2y \leq 120$$

$$x + y \geq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$$x, y \geq 0$$

6

$$x + 2y \leq 120$$

$$x + y \geq 60$$

$$x - 2y \geq 0$$

$x, y \geq 0$ সাপেক্ষে $Z = 5x + 10y$ -ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা।

20. Of the students in a college, it is known that 60% reside in hostel and 40% are day scholars (not residing in hostel). Previous year results report that 30% of all students who reside in hostel attain A grade and 20% of day scholars attain A grade in their annual examination. At the end of the year, one student is chosen at random from the college and he has an A grade, what is the probability that the student is a hostlier ? 6

এখন মহাবিদ্যালয়ৰ 60% য়ে ছাত্ৰাবাসত আৰু 40% য়ে ছাত্ৰাবাসত নাথাকে বুলি জানিব পৰা গ'ল। আগৰ বছৰৰ ফলাফল অনুসৰি বছৰেকীয়া পৰীক্ষাত ছাত্ৰাবাসত থকা সকলো ছাত্ৰৰ 30% য়ে আৰু ছাত্ৰাবাসত নথকা ছাত্ৰসকলৰ 20% য়ে A গ্ৰেড পাইছিল। বছৰৰ অন্তত মহাবিদ্যালয়খনৰ যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা এজন ছাত্ৰই A গ্ৰেড পালে। ছাত্ৰজন ছাত্ৰাবাসৰ আবাসী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

OR / অথবা

Find the mean number of heads in three tosses of a fair coin.

এটা নিখুঁত মুদ্ৰা তিনিবাৰ টছ কৰি পোৱা মুণ্ড সংখ্যাৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

6