

2013

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

NEW COURSE

নতুন পাঠ্যক্রম

1. Answer the following questions :

1×10=10

নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

(a) Given that $R = \{(a, b) \mid 3 \text{ divides } a - b\}$ is an equivalence relation in the set of integers \mathbb{Z} . What is the number of partitions of \mathbb{Z} ?

অথবা সংখ্যার সংহতি \mathbb{Z} যে $R = \{(a, b) \mid a - b, 3 \text{ দ্বারা বিভাজ্য}\}$ এটা সমতুল্য সম্বন্ধ। \mathbb{Z} এর বিভাগের সংখ্যা কত?

(b) Write down the domain of the function $\operatorname{cosec}^{-1}$.

$\operatorname{cosec}^{-1}$ ফলনের আদিক্ষেত্র লেখো।

(c) If A is a square matrix of order 3 such that $|\operatorname{adj} A| = 36$, then what is the value of $|A^T|$?

যদি A একটি 3 ঘাতের বর্গমৌলিকক, যেখানে $|\operatorname{adj} A| = 36$, তাহলে $|A^T|$ এর মান কত হবে?

Contd.

(d) If $A = [5+i]$ then what is the value of $|A|$?

যদি $A = [5+i]$, তাহলে $|A|$ র মান কী?

(e) If ω is the cube root of unity, what is the value of the one root of the equation

$$\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$$

যদি ω একটি একক কাল্পনিক ঘনমূল হয় তাহলে $\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$ সমীকরণের একটি মূল কী হবে?

(f) What is the equation of the normal at the point (x_0, y_0) if $\frac{dy}{dx}$ at this point does not exist?

(x_0, y_0) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কী হবে যদি সেই বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ স্থিত না হয়?

(g) What is the value of $\frac{d}{dx}([x])$, if $x \in (6, 7)$, where $[x]$ denotes the greatest integer $\leq x$?

যদি $x \in (6, 7)$, তাহলে $\frac{d}{dx}([x])$ র মান কত, যেখানে $[x]$ হলো বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা $\leq x$?

(h) What is the projection vector of \vec{a} along \vec{b} ?

\vec{b} এর দিকে \vec{a} এর প্রক্ষেপ ভেক্টরটি কত হবে?

(i) What is the distance of the point $(1, -2, 3)$ from z-axis?

z- অক্ষর থেকে $(1, -2, 3)$ বিন্দুর দূরত্ব কত?

(j) Can a vector have direction angles as $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$?

একটি ভেক্টরের দিশাংক কোণ $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ হতে পারে কী?

2. Show that the intersection of two equivalence relations in a set is again an equivalence relation in the set.

দেখাও যে একটি সংহতির উপরে দুটি সমতুল্য সম্বন্ধের ছেদন পুনঃ সেই সংহতির একটি সমতুল্য সম্বন্ধ।

3. Show that (দেখাও যে)

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}x = \frac{\pi}{4}; \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$$

OR (অথবা)

Find x , if (x এর মান নির্ণয় করো, যদি) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$.

4. Using the properties of determinant, Prove that

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

নির্ণায়ক ধর্ম ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে,

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$$

5. Show that $f(x) = |x-3|$ is a continuous function but it is not differentiable at $x=3$.

দেখাও যে $f(x) = |x-3|$ অবিচ্ছিন্ন ক্রিয়া, কিন্তু $x=3$ বিন্দুতে অবকলনীয় নয়।

OR (অথবা)

If $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ find $\frac{dy}{dx}$ using parametric co-ordinates.

প্রাচলিক স্থানাংক ব্যবহার করে $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এর $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

Find $\frac{dy}{dx}$, if

(i) $y = \sqrt{\tan \sqrt{x}}$

(ii) $y = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$

$\frac{dy}{dx}$ মান বের করো, যদি

(i) $y = \sqrt{\tan \sqrt{x}}$

(ii) $y = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$

7. Integrate : $\int (\sin^{-1} x)^2 dx$

পূর্ণ সংখ্যা নির্ণয় করো (অনুকল করো) : $\int (\sin^{-1} x)^2 dx$

8. Evaluate *any one* of the following :

যে কোনো একটির মান নির্ধারণ করো :

(a) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$

(b) $\int_1^2 \frac{1}{x(x^4 + 1)} dx$

9. Answer *any two* of the following :

4×2=8

নীচের যে কোনো দুটির উত্তর দাও :

(a) Solve : $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

সমাধান করো : $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(b) Find the particular solution of the differential equation

$(1 + e^{2x}) dy + (1 + y^2) e^x dx = 0$ given that $y = 1$ when $x = 0$

$(1 + e^{2x}) dy + (1 + y^2) e^x dx = 0$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাধান বের করো, যদি দেওয়া থাকে যে $y = 1$ যখন $x = 0$.

(c) Solve the differential equation

$(x^2 + xy) dy = (x^2 + y^2) dx$

$(x^2 + xy) dy = (x^2 + y^2) dx$ অবকল সমীকরণটি সমাধান করো।

10. Give the geometrical interpretation of $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$ and find the area of a parallelogram having diagonals given by the vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$. 4

$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$ র জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও এবং $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$; $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ কর্ণ হওয়া সামান্তরিকটির কালি নির্ণয় করো।

OR (অথবা)

Find the value of λ if the scalar product of the vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ with a unit vector along the sum of the vectors $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ is equal to unity.

λ -এর মান বের করো, যেখানে $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ও $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর দুটির যোগফলের দিশের একক ভেক্টরের সঙ্গে $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের স্কেলার পূরণফল একের সমান হয়।

11. Find the shortest distance between the lines given by

$$\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(-2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(-2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) \text{ ও}$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) \text{ রেখা দুটির মাঝে নিকটতম দূরত্ব নির্ণয় করো।}$$

12. Find the probability distribution of the number of heads from the tossing of a fair coin thrice. 4

একটি মুদ্রা তিনবার টস করতে পাওয়া মুণ্ড (মাথা) সংখ্যার সম্ভাবিতা বন্টন নির্ণয় করো।

OR (অথবা)

Let X denote the sum of the numbers obtained when two fair dice are rolled. Find the variance of X .

দুটি নিরুত্ত পাশা টস করে পাওয়া সংখ্যা দুটির সমষ্টি X হলে, X -এর প্রসারণ বের করো।

13. If $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{x}{2} \\ \tan \frac{x}{2} & 0 \end{bmatrix}$ then prove that $(I + A) = (I - A) \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$. 6

যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{x}{2} \\ \tan \frac{x}{2} & 0 \end{bmatrix}$ তাহলে প্রমাণ করো যে, $(I + A) = (I - A) \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$.

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Find AB and use this to solve the following system of equations :

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x + 3y + 4z &= 17 \\ y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

মনে করো $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, AB বের করো ও পূরণফলটি ব্যবহার করে নীচে

দেওয়া সমীকরণ প্রণালীটি সমাধান করো।

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x + 3y + 4z &= 17 \\ y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

14. Answer (a) or [(b) and (c)]
উত্তর করো (a) অথবা [(b) এবং (c)]

(a) Prove that the curves $x = y^2$ and $xy = k$ cut at right angles if $8k^2 = 1$.

প্রমাণ করো যে $x = y^2$ এবং $xy = k$ বক্র দুটি সমকোণে কাটাকাটি করবে যদি $8k^2 = 1$ হয়।

(b) Find two positive numbers whose sum is 16 and the sum of whose cubes is minimum.

দুটি ধনাত্মক সংখ্যা নির্ণয় করো যার যোগফল 16 হবে এবং তাদের ঘনর যোগফল লঘিষ্ঠ হবে।

(c) Show that $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$ is an increasing function of x throughout its domain.

দেখাও যে $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$ ফলনটি আদিক্ষেত্রের (মূল) সর্বত্র x -এর জন্য বর্ধমান ফলন।

15. Evaluate by expressing $\int_0^1 (2 - 3x + x^2) dx$ as the limit of a sum.

যোগফলের চরম মান হিসাবে প্রকাশ করে $\int_0^1 (2 - 3x + x^2) dx$ এর মান বের করো।

16. Find the Cartesian equation of the plane passing through the intersection of the planes

$$\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 4 \text{ and } \vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = -3 \text{ and also passing through the point } (1, -1, 1).$$

6

$\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 4$ এবং $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = -3$ সমতলের প্রতিচ্ছেদ এবং $(1, -1, 1)$ বিন্দু অতিক্রম করা সমতলটির কার্টিসিয় সমীকরণটি নির্ণয় করো।

OR (অথবা)

Show that the lines $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$ and $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$ are coplanar. Find also the equation of the plane.

দেখাও যে $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5}$ এবং $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5}$ রেখা দুটি এক সমতলীয়। সেই সঙ্গে সমতলটির সমীকরণ বের করো।

17. Using integration, find the area of the region bounded by the triangle whose vertices are $(-1, 0)$, $(1, 3)$ and $(3, 2)$.

6

অনুকল ব্যবহার করে $(-1, 0)$, $(1, 3)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুকে ঘিরে থাকা ত্রিভুজ ক্ষেত্রের কালি বের করো।

OR (অথবা)

Find the area lying above the x-axis and enclosed by the circle $x^2 + y^2 = 8x$ and the parabola $y^2 = 4x$.

x অক্ষের উপর দিকে অধিবৃত্ত $y^2 = 4x$ ও বৃত্ত $x^2 + y^2 = 8x$ দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের কালি নির্ণয় করো।

18. A manufacturer of furniture makes two products : Chairs and tables. Processing of the products is done on two machines A and B. A chair requires 2 hours on machine A and 6 hours on machine B. A table requires 5 hours on machine A and 2 hours on machine B. There are 16 hours of time available on machine A and 22 hours on machine B. If the profit gained by the manufacturer from a chair and a table are Rs. 3 and Rs. 5 respectively, how many pieces of each of chairs and tables must be produced in order

6

একজন আসবাব প্রস্তুতকারী দুই ধরনের সামগ্রী — চেয়ার ও টেবিল দুটি মেশিন A ও B-এর সাহায্যে তৈরী করে। একটি চেয়ার তৈরী করতে A মেশিনের 2 ঘণ্টা ও B-র 6 ঘণ্টার প্রয়োজন। একটি চেয়ার প্রস্তুত করতে মেশিন A-র 5 ঘণ্টা ও মেশিন B-র 2 ঘণ্টার প্রয়োজন। মেশিন A-র জন্য 16 ঘণ্টা ও B-র জন্য 22 ঘণ্টা সময় ধার্য করা আছে। যদি প্রস্তুতকারী একটি চেয়ার ও একটি টেবিলে যথাক্রমে 3 টাকা ও 5 টাকা লাভ করে, তাহলে কয়টি চেয়ার ও টেবিল প্রস্তুত করতে হবে যাতে লাভের পরিমাণ সর্বোচ্চ হয়?

19. Suppose there are four boxes A, B, C and D containing coloured marbles as given below :

Box	Marble Colour		
	Red	White	Black
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

One of the boxes has been selected at random and a single marble is drawn from it. If the marble is red, what is the probability that it was drawn from (i) box A ? (ii) box B ? (iii) box C ?

ধরো, নিম্নোক্ত সারণিতে উল্লেখ করা ধরণে A, B, C ও D চারটি বাক্সে রঙীন মার্বেল রাখা আছে।

বাক্স	মার্বেলের রঙ		
	লাল	সাদা	কালো
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

বাক্স কয়টি থেকে একটি বাক্স যাদৃচ্ছিকভাবে বাছাই করা হলো ও মার্বেল বাক্সটি থেকে নেওয়া হলো। যদি মার্বেলটি লাল হয় তাহলে এটি (i) বাক্স A (ii) বাক্স B (iii) বাক্স C-এর থেকে নির্বাচিত হবার সম্ভাবিতা কত?

OR (অথবা)

From a lot of 30 bulbs which include 6 defective, a sample of 4 bulbs is drawn at random with replacement. Find the probability distribution of the number of defective bulbs.

30টি বাল্বের গুচ্ছে 6টি খারাপ বাল্ব আছে। যাদৃচ্ছিকভাবে গুচ্ছটি থেকে 4টি বাল্ব পুনঃস্থাপন করে নেওয়া হলো। প্রাপ্ত খারাপ বাল্বের সংখ্যার সম্ভাবিতা বন্টন বের করো।

_____x_____