

Total number of pages—12

**24T-MATH
BENGALI.**

2014

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

Contd.

1. Answer the following questions :

1×10=10

নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

(a) Is multiplication a binary operation on the set $\{0\}$.

পূরণ প্রক্রিয়াটি $\{0\}$ সংহতির ওপরে একটি দ্বৈত প্রক্রিয়া কী?

(b) If $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = 0$, write down the value of x .

যদি $\cos^{-1} x - \sin^{-1} x = 0$, তাহলে x -এর মান লেখো।

(c) If A be a square matrix of order 2 whose determinant is $-i$, find the value of $|A(\text{adj } A)|$

যদি A একটি 2 ঘাতের বর্গ মৌলকক্ষ যার নির্ণায়ক $-i$, তাহলে $|A(\text{adj } A)|$ -এর মান বের করো।

(d) What is the number of all possible 2×3 matrices with entries 0 or 1?

যদি 2×3 আকারের একটি মৌলকক্ষের মৌলগুলি 0 বা 1 হয়, তাহলে এ ধরনের আকারের কত সংখ্যক মৌলকক্ষ পাওয়া সম্ভব?

(e) If $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ik}]_{n \times p}$ be two matrices and $AB = [c_{ik}]_{m \times p}$, then what is the relation among a_{ij} , b_{jk} and c_{ik} ?

যদি $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ik}]_{n \times p}$ দুটি মৌলকক্ষ এবং $AB = [c_{ik}]_{m \times p}$, তাহলে a_{ij} , b_{jk} এবং c_{ik} -এর মাঝের সম্বন্ধ কী?

(f) What is the value of $\lim f(x)$ if a function f is continuous at $x=0$ and $f(0)=7$?

$\lim f(x)$ -এর মান কত হবে, যদি $x=0$ এবং $f(0)=7$ -তে ফলন f অবিচ্ছিন্ন হয়?

(g) State whether it is true or false : "The derivative of an even function is always an even function".

সত্যাসত্য বিচার করো : "একটি যুগ্মফলনের অবকলজ সর্বদা যুগ্ম ফলন।"

- (h) If \hat{a} and \hat{b} are two mutually perpendicular unit vectors, what is the value of $(2\hat{a} + 3\hat{b}) \cdot (4\hat{a} - 5\hat{b})$?

যদি \hat{a} এবং \hat{b} দুটি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টর হয়, তাহলে $(2\hat{a} + 3\hat{b}) \cdot (4\hat{a} - 5\hat{b})$ -এর মান কত?

- (i) What is the general equation of a plane parallel to Z-axis.

Z-অক্ষের সমান্তরাল সাধারণ সমতলের সমীকরণ কী?

- (j) Let l, m, n be the direction cosines of the line \overrightarrow{OP} where $|\overrightarrow{OP}| = r$ and Q be any point on OP where $|\overrightarrow{OQ}| = s$. What is the co-ordinate of the mid-point of \overrightarrow{PQ} ?

ধর l, m, n \overrightarrow{OP} রেখার দিশাঙ্ক, যেখানে $|\overrightarrow{OP}| = r$ এবং Q , \overrightarrow{OP} রেখার ওপরে যেকোনো একটি

বিন্দু, যেখানে $|\overrightarrow{OQ}| = s$. \overrightarrow{PQ} মধ্যবিন্দুর স্থানাংক কী হবে?

2. Let X be a non-empty set and $P(X)$ be the power set of X . Consider the binary operation $*$ on $P(X)$ defined by $A * B = A \cap B \quad \forall A, B \in P(X)$. Show that X is the identity element as well as the only invertible element in $P(X)$ w.r.t. $*$. 4

ধর, X একটি অরিক্ত সংহতি এবং $P(X)$, X -এর একটি ঘাত সংহতি। $*$, $P(X)$ -এর ওপরে একটি দ্বৈত প্রক্রিয়া যেখানে $A * B = A \cap B \quad \forall A, B \in P(X)$ । দেখাও যে, $*$ প্রক্রিয়ার জন্য X , $P(X)$ -এর একক মৌল এবং সঙ্গে একমাত্র বিপরীত যুক্ত মৌল।

3. Solve the following equation for x :

4

x -এর জন্য সমাধান করো :

$$\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \tan^{-1}(-7)$$

OR / অথবা

$$\sin^{-1}(6x) + \sin^{-1}(6\sqrt{3}x) = -\frac{\pi}{2}$$

4. Answer the following questions :

2+2=4

নীচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :

(i) If A and B are two matrices such that $AB = B$ and $BA = A$, then find the value of $A^2 + B^2$.

যদি A এবং B দুটি মৌলকক্ষ যেখানে $AB = B$ এবং $BA = A$; তাহলে $A^2 + B^2$ -এর মান বের করো।

(ii) Show that the diagonal elements of a skew-symmetric matrix are all zero.

দেখাও যে, বিঘম সমমতি মৌলকক্ষের সবগুলি বিকর্ণ মৌল শূন্য।

5. Prove that the function given by $f(x) = |x-1|$, $x \in \mathbb{R}$ is not differentiable at $x=1$. Also examine the continuity at that point. 4

প্রমাণ করো যে, ফলন $f(x) = |x-1|$, $x \in \mathbb{R}$ $x=1$ বিন্দুতে অবকলনীয় হয় না। সঙ্গে $x=1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা করো।

OR / অথবা

If $y = (\tan^{-1} x)^2$ show that

$$(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x(x^2 + 1)y_1 = 2$$

যদি $y = (\tan^{-1} x)^2$ হয়, দেখাও যে

$$(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x(x^2 + 1)y_1 = 2.$$

6. If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ then show that 4

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

যদি $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ তাহলে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

7. Integrate / অনুকলন করো। 4

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x+2)} dx$$

8. Evaluate / মান নির্ণয় করো। 4

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

OR / অথবা

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$$

9. Answer **any two** of the following questions : 4×2=8

নীচের যে কোনো দুটির উত্তর করো :

(a) Solve / সমাধান করো

$$(4x - 3y + 4) dy + (3y - 4x) dx = 0$$

- (b) Find the particular solution of the differential equation $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2e^{-y} - 1$ given that $y=0$ when $x=0$.

অবকলন সমীকরণ $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2e^{-y} - 1$ -এর বিশেষ সমাধান বের করো, যখন $x=0$ হলে $y=0$ হয়।

- (c) Find the solution curve passing through the point $(1, -1)$ of the differential equation $xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$.

$xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ অবকল সমীকরণের জন্য $(1, -1)$ বিন্দুর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করা বক্রটি নির্ণয় করো।

10. Show that, for any vector \vec{a} ,

4

$$(\vec{a} \times \hat{i})^2 + (\vec{a} \times \hat{j})^2 + (\vec{a} \times \hat{k})^2 = 2a^2$$

যেকোনো ভেক্টর \vec{a} -এর জন্য, দেখাও যে,

$$(\vec{a} \times \hat{i})^2 + (\vec{a} \times \hat{j})^2 + (\vec{a} \times \hat{k})^2 = 2a^2$$

OR / অথবা

Let $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. Find the vector \vec{d} which is perpendicular to both \vec{a} and \vec{b} and $\vec{c} \cdot \vec{d} = 18$.

ধর $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$; $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. যদি \vec{d} একটি ভেক্টর \vec{a} এবং \vec{b} উভয়ের ওপরে লম্ব এবং $\vec{c} \cdot \vec{d} = 18$ হয়, তাহলে \vec{d} ভেক্টরটি বের করো।

11. Find the co-ordinates of the foot of the perpendicular drawn from origin to the plane $2x - y + z - 5 = 0$. 4

মূল বিন্দু থেকে $2x - y + z - 5 = 0$ সমতল পর্যন্ত টানা লম্ব পাদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করো।

12. Let X denote the sum of the numbers obtained when two fair dice are rolled. Find the variance of X . 4

দুটি নিখুঁত ডাইস্ টস্ করে পাওয়া সংখ্যার যোগফলক X বোঝালে, X -এর প্রসারণ নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Two cards are drawn simultaneously (or successively without replacement) from a well shuffled pack of 52 cards. Find the mean and variance of the number of kings.

52টি তাসের একটি প্যাক ভাল করে মিশিয়ে নিয়ে প্যাকটি থেকে দুটি তাস একই সময়ে (নতুবা একাদিক্রমে পুনঃস্থাপন না করে) টানা হ'ল। তাসটি রাজা হওয়ার সংখ্যার মাধ্য এবং প্রকরণ বের করো।

13. If a, b, c are real numbers and 6

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0,$$

prove that either $a+b+c=0$ or $a=b=c$

যদি a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0,$$

প্রমাণ করো যে $a+b+c=0$ বা $a=b=c$

OR / অথবা

Without expanding at any stage prove that / বিস্তার না করে প্রমাণ করো যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & b+c \\ 1 & ca & c+a \\ 1 & ab & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

14. Find the equation of tangents of the curve $y = \cos(x+y)$; $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ that are parallel to the line $x+2y=0$ 6

$x+2y=0$ রেখার সমান্তরাল হওয়া $y = \cos(x+y)$; $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

করো।

OR / অথবা

Show that

(i) the function f given by

$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, $x > 0$ is always a strictly increasing function in $(0, \pi/4)$

(ii) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ has maximum at $x=e$.

দেখাও যে — ফলন f যেখানে

(i) $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, $x > 0$ $(0, \pi/4)$ অন্তরালে সর্বদা একদিক্টি বর্ধমান ফলন।

(ii) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ফলনটি $x=e$ বিন্দুতে গরিষ্ঠ।

15. Evaluate $\int_0^4 (x + e^{2x}) dx$ by expressing it as the limit of a sum. 6

যোগফলের চরম মান হিসাবে প্রকাশ করে

$$\int_0^4 (x + e^{2x}) dx \text{ এর মান বের করো।}$$

16. Find the angle between the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{6}$ and the plane $x - 2y + z = 3$. Also find the point at which the line intersects the given plane. 6

$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{6}$ রেখা এবং $x - 2y + z = 3$ সমতলের মাঝের কোণটি নির্ণয় করো। সঙ্গে সমতলটিকে রেখা দ্বারা কাটা বিন্দুটি নির্ণয় করো।

OR / অথবা

Find the shortest distance and the equation of shortest distance between the lines

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y+9}{-16} = \frac{z-10}{7} \text{ and } \frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}.$$

$\frac{x-8}{3} = \frac{y+9}{-16} = \frac{z-10}{7}$ আৰু $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ রেখা দুটির মাঝের নিম্নতম দূরত্ব এবং সেটির সমীকরণ বের করো।

17. Find the area of the region in the 1st quadrant enclosed by the x -axis, the line $x = \sqrt{3}y$ and the circle $x^2 + y^2 = 4$. 6

x -অক্ষ, $x = \sqrt{3}y$ রেখা এবং $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত বেষ্টিত প্রথম কোণে থাকা ক্ষেত্রটির কালি বা ক্ষেত্রফল বের করো।

OR / অথবা

Find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

$y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ অধিবৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের কালি বা ক্ষেত্রফল বের করো।

18. Showing the feasible region, solve graphically the following linear programming problem : 6

$$\text{Maximize } Z = 5x - 2y$$

$$\text{Subject to } 5x + 6y \geq 30$$

$$9x - 2y = 72$$

$$y \leq 9, \quad x, y \geq 0$$

ব্যবহার্য ক্ষেত্র দেখিয়ে নীচের রৈখিক প্রকল্পন সমস্যাটির লৈখিক সমাধান করো।

$$\text{সর্বোচ্চ } Z = 5x - 2y$$

$$\text{যেখানে } 5x + 6y \geq 30$$

$$9x - 2y = 72$$

$$y \leq 9, \quad x, y \geq 0$$

19. There are three coins. One is a two headed coin (having heads on both sides), another is a biased coin that turns up heads 75% of the time and third is an unbiased coin. One of the three coins is chosen at random and tossed. It shows head. What is the probability that it was the two headed coin ? 6

তিনটি মুদ্রার একটি দ্বিমুণ্ড বিশিষ্ট (দুই পিঠে মুণ্ড থাকা) দ্বিতীয়টি বিষম গাঁথুনিযুক্ত, যার টস্ কার্যত 75% মুণ্ড প্রাপ্ত হয় এবং তৃতীয়টি নিখুঁত গাঁথুনিযুক্ত। যাদৃচ্ছিকভাবে মুদ্রা তিনটির মধ্যে একটি করে টস্ করলে মুণ্ড প্রাপ্ত হয়। মুদ্রাটি দ্বিমুণ্ড বিশিষ্ট হওয়ার সম্ভাবিতা কত?

OR / অথবা

Probability of solving a specific problem independently by A and B are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ respectively. If both try to solve the problem independently, find the probability that

- (i) the problem is solved.
(ii) exactly one of them solves the problem.

3+3=6

A এবং B দ্বারা একটি বিশেষ সমস্যা স্বতন্ত্রভাবে সমাধান করার সম্ভাবিতা হ'ল ক্রমে $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$ । যদি সমস্যাটি সমাধানের জন্য উভয়েই চেষ্টা করে, তাহলে সম্ভাবিতা নির্ণয় করো যাতে

- (i) সমস্যাটির সমাধান হয়
- (ii) তাদের মধ্যে একজনই সমস্যাটি সমাধান করে।

— x —