Total number of pages—16

25T MATH
(BENGALI)

2015

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Contd.

1. Answer the following questions : 1×10=10

নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

(a) If $A=\{0, 1, 3\}$, what is the number of relations on A?

যদি $A=\{0, 1, 3\}$ হয়, তাহলে A-র উপরে কতগুলি সম্বন্ধ হবে?

(b) Find the principal value of $sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$.

$sin^{-1}\left(sin\frac{3\pi}{5}\right)$-য়ের মুখ্যমান বের করো।

(c) If $[5\ 6\ 7]A=[13\ 23]$, what is the order of the matrix A?

যদি $[5\ 6\ 7]A=[13\ 23]$; A-এর ঘাত কত?

(d) If A is a nonsingular matrix such that $A^2+A-I=0$, what is A^{-1}?

যদি A একটি অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ যেখানে $A^2+A-I=0$, তাহলে A^{-1} কত হবে?

(e) What is the co-factor of 7 in the determinant $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 13 & 15 & 17 \end{vmatrix}$?

$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 13 & 15 & 17 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের 7 মৌলটির সহউৎপাদক কত?

(f) Is the derivative of an even function even ?

যুগ্মফলনের অবকলজ যুগ্ম হয় কী?

(g) Is the function $f(x)=x^2,\ x\in \mathbb{R}$ increasing ?

$f(x)=x^2,\ x\in \mathbb{R}$ ফলনটি বর্ধমান ফলন হবে কী?

(h) What are the direction cosines of the vector $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$?

ভেক্টর $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$-এর দিশাঙ্ক কত?

(i) If the distance of a plane from the origin be 'd' and direction cosines of the normal to the plane through origin be (l, m, n), what are the co-ordinates of the foot of the normal ?

যদি মূলবিন্দু থেকে একটি সমতলের দূরত্ব 'd' ও মূলবিন্দু থেকে যাওয়া সমতলের অভিলম্বের দিশাঙ্ক (l, m, n) হয়, তাহলে অভিলম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কী হবে?

(j) What are the equations of the planes parallel to xz-plane and at a distance 'a' from it ?

xz-সমতলের সমান্তরাল ও 'a' দূরত্বে থাকা সমতলগুলির সমীকরণ কী?

2. A function $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = 2x^2$. Is the function f one-one, and onto ? Justify your answer. 2+2=4

একটি ফলন $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$-এর সংজ্ঞা এমনভাবে দেওয়া আছে $f(x) = 2x^2$. ফলনটি ওয়ান-ওয়ান (একৈকী) ও আচ্ছাদক হবে কী?

OR / অথবা

Let L be the set of all lines in the xy-plane and R be the relation in L defined by $R = \{(l_i, l_j) \mid l_i \text{ parallel to } l_j, \forall i, j\}$. Show that R is an equivalence relation. Find the set of all lines related to the line $y = 7x + 5$. 3+1=4

xy-সমতলের সমস্ত রেখার সংহতি L ও L-য়ের উপরে R একটি সম্বন্ধ যেখানে $R = \{(l_i, l_j) \mid l_i, l_j$ সমান্তরাল, $\forall i$, এবং $j\}$। দেখাও যে, R একটি সমতুল্য সম্বন্ধ। $y = 7x + 5$ রেখার সঙ্গে সম্বন্ধ থাকা প্রতিটি রেখার সংহতি নির্ণয় করো।

3. If $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right)=\alpha$, prove that $x^2=\sin 2\alpha$. 4

যদি $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right)=\alpha$ হয় তাহলে প্রমাণ করো যে $x^2=\sin 2\alpha$.

4. If $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, find a matrix C such that $CAB=I=ABC$, where I is the 2×2 unit matrix. 4

যদি $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ও $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, তাহলে মৌলকক্ষ C বের করো যেখানে $CAB=I=ABC$, I হল 2×2 আকারের একক মৌলকক্ষ।

OR / অথবা

Using elementary row operation, find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 4

মৌলিক সারি (রো) প্রক্রিয়া ব্যবহার করে $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটির প্রতিলোম মৌলকক্ষ বের করো।

5. If $y + \sin y = \cos x$ then find the values of y for which $\frac{dy}{dx}$ is valid. 4

যদি $y + \sin y = \cos x$ হয়, তাহলে y-য়ের কী মানের জন্য $\frac{dy}{dx}$ যুক্তিসঙ্গত হবে?

6. If a function is differentiable at a point, prove that it is continuous at that point. 4

প্রমাণ করো যে, যদি একটি ফলন একটি বিন্দুতে অবকলনীয় হয় তাহলে ফলনটি সেই বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

OR / অথবা

Using Rolle's theorem, find at what points on the curve $y = \cos x - 1$ in $[0, 2\pi]$ the tangent is parallel to x-axis.

রোলের উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও $y = \cos x - 1$ বক্রের $[0, 2\pi]$ অন্তরালের কোন বিন্দুগুলিতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হবে।

7. Evaluate ***any one*** of the integrals : 4

যে কোনো একটি অনুকলের মান বের করো।

(i) $\int_{1/3}^{1} \frac{(x - x^3)^{1/3}}{x^4} dx$

(ii) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$

8. Prove that $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, when f is an odd function. Hence evaluate $\int_{-1}^{1} log\,\frac{2-x}{2+x}\,dx$. 4

প্রমাণ করো যে $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, যখন f একটি অযুগ্ম ফলন ও এর থেকে $\int_{-1}^{1} log\,\frac{2-x}{2+x}\,dx$-এর মান বের করো।

9. Solve *(any one)* : 4

সমাধান করো ঃ *(যে কোনো একটি)*

(i) $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} + y = tan^{-1}x$

(ii) $x\frac{dy}{dx} = y - x\,tan\,\frac{y}{x}$

10. Find the equation of a curve passing through the origin, given that the slope of the tangent to the curve at any point (x, y) is equal to the sum of the co-ordinates of the point. 4

মূল বিন্দুর মাঝখান দিয়ে অতিক্রম করা একটি বক্রের সমীকরণ বের করো। বক্রটির যে কোনো বিন্দু (x, y) তে স্পর্শকের প্রবণতা বিন্দুটির স্থানাঙ্কের যোগফলের সমান।

11. Using vectors prove that angle in a semicircle is a right angle. 4

ভেক্টর ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

OR / *অথবা*

Using vectors prove that

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

ভেক্টর ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

12. Find the vector equation of a plane in normal form. 4

সমতলের অভিলম্ব আকারের ভেক্টর সমীকরণ বের করো।

OR / *অথবা*

Find the equation of a plane passing through a given point and perpendicular to a given vector in vector form.

নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যাওয়া ও নির্দিষ্ট ভেক্টরের লম্বভাবে থাকা একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ বের করো।

13. Assume that each child born is equally likely to be a boy or a girl. If a family has two children, what is the conditional probability that both are girls, given that

(i) the youngest is a girl,

(ii) at least one is a girl ? 4

প্রতিটি শিশুই ছেলে বা মেয়ে হয়ে জন্মলাভ করা ঘটনাটি সমসম্ভাব্য বলে ধরা যাক। যদি একটি পরিবারে দুটি শিশু থাকে তাহলে দুটি শিশুই মেয়ে হবার শর্তাধীন সম্ভাবিতা কী, যেখানে

(i) কনিষ্ঠতম শিশুটি মেয়ে হয়।

(ii) কমপক্ষেও একটি শিশু মেয়ে হয়।

OR / অথবা

The probability of a shooter hitting a target is $\frac{3}{4}$. How many minimum number of times must he/she fire so that the probability of hitting the target at least once is more than $0 \cdot 99$?

একজন শুটার কোনো লক্ষ্যবস্তু ভেদ করার সম্ভাবিতা হল $\frac{3}{4}$। সর্বনিম্ন কত বার তিনি গুলি নিক্ষেপ করবেন যাতে কমপক্ষে একবার লক্ষ্যভেদ করার সম্ভাবিতা 0·99 থেকে বেশি হয়?

14. If x, y, z are all different and

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0,$$

prove that $xyz = -1$. 6

যদি x, y, z প্রত্যেকটি আলাদা ও

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0,$$

তাহলে প্রমাণ করো যে $xyz = -1$.

OR / অথবা

If $a \neq p$; $b \neq q$; $c \neq r$ and

$$\begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0,$$

then find the value of $\frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c}$.

যদি $a \neq p$; $b \neq q$; $c \neq r$ ও

$$\begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0,$$

তাহলে $\frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c}$ এর মান বের করো।

15. Find the maximum and minimum value of the following functions ; if exist. 3+3=6

নিচের ফলনগুলির, যদি অস্তিত্ব থাকে, গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান বের করো,

(i) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x)=\log x,\ x>0$.

OR / অথবা

Find the maximum area of an isosceles triangle inscribed in the ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ with its vertex at one end of the major axis. 6

একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তে অন্তর্লিখিত করা হল যাতে এর শীর্ষবিন্দু মুখ্য অক্ষের একটি দিকে থাকে। ত্রিভুজটির গরিষ্ঠ কালি বের করো।

16. Evaluate : 6

মান বের করো ঃ

$$\int_0^1 \tan^{-1} \frac{2x-1}{1+x-x^2}\, dx$$

OR / অথবা

Evaluate $\int_1^3 \left(x^2+x\right)dx$ as the limit of a sum.

যোগের সীমা হিসাবে প্রকাশ করে

$\int_1^3 \left(x^2+x\right)dx$ -এর মান বের করো।

17. Find the area bounded by

$y=x^2$ and $y=|x|$ 6

$y=x^2$ ও $y=|x|$-এর দ্বারা ঘেরা ক্ষেত্রের কালি বের করো।

OR / অথবা

Find the ratio in which the area bounded by the curves $y^2=12x$ and $x^2=12y$ is divided by the line $x=3$.

$y^2=12x$ ও $x^2=12y$ বক্রদুটি ঘিরে রাখা ক্ষেত্র $x=3$ রেখা দ্বারা ভাগ করলে ভাগ দুটির অনুপাত বের করো।

18. Show that the lines

$\vec{r}=\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}-\hat{j}\right)$

and $\vec{r}=\left(4\hat{i}-\hat{k}\right)+\mu\left(2\hat{i}+3\hat{k}\right)$ are coplanar.

Also, find the equation of the plane containing both these lines. 6

দেখাও যে $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - \hat{j})$

ও $\vec{r} = (4\hat{i} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{k})$ রেখা দুটি এক সমতলীয়। সেইসঙ্গে রেখা দুটির মধ্য দিয়ে যাওয়া সমতলের সমীকরণ বের করো।

19. A factory makes tennis rackets and cricket bats. A tennis racket takes $1 \cdot 5$ hours of machine time and 3 hours of craftman's time in its making, while a cricket bat takes 3 hours of machine time and 1 hour of craftman's time. In a day the factory has the availability of not more than 42 hours of machine time and 24 hours of craftman's time. If the profit on racket and on a bat is Rs. 20 and Rs. 10 respectively, find the maximum profit of the factory when it works at full capacity. 6

একটি কারখানাতে টেনিস র‍্যাকেট ও ক্রিকেট ব্যাট তৈরি করা হয়। একটি টেনিস র‍্যাকেট মেশিনে তৈরি করতে $1 \cdot 5$ ঘণ্টা ও হাতে তৈরি করতে 3 ঘণ্টা সময়ের প্রয়োজন হয়। অন্যদিকে, একটি ক্রিকেট ব্যাট তৈরি করতে মেশিনে 3 ঘণ্টা ও হাতে তৈরি করতে 1 ঘণ্টা সময়ের প্রয়োজন হয়। একদিনে মেশিনে 42 ঘণ্টা ও হাতে তৈরি করতে 24 ঘণ্টার বেশি সময় পাওয়া যায় না। প্রতিটি র‍্যাকেট ও ব্যাটের লাভের পরিমাণ যথাক্রমে 20 টাকা ও 10 টাকা হলে পূর্ণ কার্যক্ষমতায় চলতে থাকা অবস্থায় কারখানার সর্বোচ্চ লাভের পরিমাণ নির্ণয় করো।

Minimize and maximize $Z = x + 2y$

subject to $x + 2y \geq 100$; $2x - y \leq 0$; $2x + y \leq 200$

$x, y \geq 0$.

$x + 2y \geq 100$; $2x - y \leq 0$; $2x + y \leq 200$; $x, y \geq 0$ সাপেক্ষে $Z = x + 2y$-এর সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মান বের করো।

20. Assume that the chances of a patient having a heart attack is 40%. It is also assumed that a meditation and yoga course reduces the risk of heart attack by 30% and prescription of certain drug reduces its chances by 25%. At a time a patient can choose any one of the two options with equal probabilities. It is given that after going through one of the two options the patient selected at random suffers a heart attack. Find the probability that the patient followed a course of meditation and yoga. 6

মনে করো, একজন রোগীর হার্ট অ্যাটাক হওয়ার সম্ভাবনা 40%। সেইসঙ্গে ধরা হল যে ধ্যান ও যোগ চর্চার ফলে হার্ট অ্যাটাকের বিপদ 30% হ্রাস করে ও নির্দিষ্ট ড্রাগ সেবনে 25% হ্রাস করে। একেবারে একজন রোগী দুই বিকল্পের যে কোনো একটি বাছতে পারে ও দুটি বিকল্পেরই সম্ভাবনা সমান। দেখা গেল যে, দুটি বিকল্পের কোনো একটি যাদৃচ্ছিকভাবে বেছে নেওয়ার পরে একজন রোগীর হার্ট অ্যাটাক হল। রোগীর ধ্যান ও যোগাভ্যাস অনুসরণ করার সম্ভাবিতা বের করো।

OR / অথবা

In a 20-question true-false examination, suppose a student tosses a fair coin to determine his answer to each question. If the coin falls head, he answers 'true'. If it falls tail, he answers false. Find the probability that he answers at least 12 questions as true.

কোনো পরীক্ষাতে সত্য-অসত্য প্রশ্নের সংখ্যা আছে 20টি। ধরা হল একজন ছাত্র প্রতিটি প্রশ্নের উত্তর নির্ণয় করতে একটি নিখুঁত মুদ্রা টস্ করে। যদি মুদ্রাটির মুণ্ড প্রাপ্ত হয় তখন প্রশ্নটির উত্তর 'সত্য' লেখে। আবার যদি মুদ্রাটিতে লেজ প্রাপ্ত হয় তাহলে উত্তরটি 'অসত্য' লেখে। তার কমপক্ষে 12টি প্রশ্নের উত্তর শুদ্ধ লেখার সম্ভাবিতা বের করো।

———×———