Total number of pages—16

**27T MATH**
**(BENGALI)**

# 2017

# MATHEMATICS

**Full Marks : 100**

**Pass Marks : 30**

**Time : Three hours**

***The figures in the margin indicate full marks for the questions.***

| | |
|---|---|
| *Q. No.* ***1*** *(a–j) carries* ***1*** *mark each* | $1 \times 10 = 10$ |
| *Q. Nos.* ***2–12*** *carry* ***4*** *marks each* [ *Q. No.* ***7*** *has two parts, 7 (i), (ii)* ] | $4 \times 12 = 48$ |
| *Q. Nos.* ***13–19*** *carry* ***6*** *marks each* | $6 \times 7 = 42$ |
| | Total = 100 |

*Contd.*

1. Answer the following questions : 1×10=10

নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর লেখো ঃ

(a) If the function $f = \{(1,5), (2,6), (3,4)\}$ from the set $A = \{1, 2, 3\}$ to the set $B$ is invertible, find the set $B$.

সংহতি $A = \{1, 2, 3\}$ থেকে সংহতি $B$ পর্যন্ত একটি ফলন $f = \{(1,5), (2,6), (3,4)\}$ প্রতিলোমণীয় হলে, $B$ সংহতিটি বের করো।

(b) Find the value of $x$ such that $\cos\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{2}$.

$x$-এর মান নির্ণয় করো যাতে $\cos\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{2}$ হয়।

(c) If $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ and $A + A^T = I$, write down the general values of $\alpha$.

যদি $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ও $A + A^T = I$ হয়, তাহলে $\alpha$-এর সাধারণ মান লেখো।

(d) If $A$ is a matrix of order 3×4 and $B$ is a matrix of order 4×5, what is the order of the matrix $(AB)^T$ ?

যদি মৌলকক্ষ $A$-এর মাত্রা 3×4 এবং মৌলকক্ষ $B$-এর মাত্রা 4×5 হয়, তাহলে মৌলকক্ষ $(AB)^T$-এর মাত্রা কত?

(e) Let $A$ be a $3 \times 3$ determinant and $|A| = 7$. Find the value of $|2A|$.

ধরা যাক $A$ একটি $3 \times 3$ নির্ণায়ক ও $|A| = 7$, তাহলে $|2A|$-এর মান নির্ণয় করো।

(f) Write down the range of $f(x) = cosec^{-1}x$.

$f(x) = cosec^{-1}x$ ফলনের পরিসর লেখো।

(g) Find the order and the degree of the differential equation

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0.$$

$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$ অবকল সমীকরণটির ক্রম ও ঘাত লেখো।

(h) If $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$ are such that $\vec{a} \perp \vec{b}$, what is the value of $\lambda$?

যদি $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$ ভেক্টর দুটি এমন যেখানে $\vec{a} \perp \vec{b}$, তাহলে $\lambda$-এর মান কত?

(i) What is the equation of the plane passing through $(\alpha, \beta, \gamma)$ and parallel to the plane $x + y + z = 0$?

$(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুর মধ্য দিয়ে যাওয়া এবং $x + y + z = 0$ সমতলের সমান্তরাল হওয়া সমতলটির সমীকরণ লেখো।

(j) If the planes $2x-4y+3z=5$ and $x+2y+\lambda z=12$ are perpendicular to each other, what is the value of $\lambda$ ?

যদি সমতল $2x-4y+3z=5$ এবং $x+2y+\lambda z=12$ পরস্পর লম্ব হয়, তাহলে $\lambda$-এর মান কত?

2. Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be two functions defined by $f(x)=|x|$ and $g(x)=[x]$, where $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to $x$.

Find $(f\circ g)(5\cdot 75)$ and $(g\circ f)\left(-\sqrt{5}\right)$. 2+2=4

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ও $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ফলন দুটির সংজ্ঞা এইভাবে দেওয়া আছে, $f(x)=|x|$ ও $g(x)=[x]$, যেখানে $[x]$, $x$ এর থেকে ছোট অথবা সমান বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যাকে বোঝায়। $(f\circ g)(5\cdot 75)$ ও $(g\circ f)\left(-\sqrt{5}\right)$ এর মান বের করো।

**OR / অথবা**

Show that the relation $R$ in $\mathbb{R}$, defined by $R=\{(a,b): a\le b\}$, is reflexive and transitive, but not symmetric. 4

দেখাও যে বাস্তব সংখ্যার সংহতি $\mathbb{R}$-এর মধ্যে, $R=\{(a,b): a\le b\}$ একটি প্রতিফলনীয় ও সংক্রামক সম্বন্ধ কিন্তু প্রতিসম নয়।

3. Prove that 4

প্রমাণ করো যে

$$cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1-\alpha}}\right)=\frac{x}{2}$$

where (যেখানে) $\alpha=sin x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

**OR / অথবা**

Prove that

প্রমাণ করো যে

$$2\tan^{-1}\left[\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}\tan\frac{\theta}{2}\right]=\cos^{-1}\left(\frac{a\cos\theta+b}{a+b\cos\theta}\right).$$ 4

4. Show that 4

দেখাও যে

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix}=(1+pxyz)(x-y)(y-z)(z-x).$$

**OR / অথবা**

Without expanding the determinant at any stage, show that

$$\begin{vmatrix} x^2+x & x+1 & x-2 \\ 2x^2+3x-1 & 3x & 3x-3 \\ x^2+2x+3 & 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix}=xA+B$$ 4

where $A$ and $B$ are determinants of order 3 not involving $x$.

কোনো অবস্থাতেই নির্ণায়কটির সম্প্রসারণ না করে দেখাও যে,

$$\begin{vmatrix} x^2+x & x+1 & x-2 \\ 2x^2+3x-1 & 3x & 3x-3 \\ x^2+2x+3 & 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix}=xA+B$$

যেখানে $A$ ও $B$ 3-মাত্রার $x$ ব্যতিত নির্ণায়ক।

5. Show that the function defined by $f(x)=x-[x]$ is discontinuous at all integral points, where $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to $x$. 4

দেখাও যে, ফলন $f(x)=x-[x]$, সমস্ত অখণ্ড বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন, যেখানে $[x]$-কে $x$ এর থেকে ছোট অথবা সমান বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা বোঝায়।

**OR / অথবা**

If $y=e^{a\cos^{-1}x}$, $-1\le x\le 1$, show that

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0.$$ 4

যদি $y=e^{a\cos^{-1}x}$, $-1\le x\le 1$ হয়, দেখাও যে,

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-a^2y=0$$

6. If $y^x+x^y=1$, find $\frac{dy}{dx}$. 4

যদি $y^x+x^y=1$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

**OR / অথবা**

State Mean value theorem and verify it for the following function :

$f(x)=x^2-4x-3$, $x\in[1,4]$. 1+3=4

মধ্যমান উপপাদ্যটি বিবৃত করো ও নিচের ফলনটির ক্ষেত্রে উপপাদ্যটির সত্যতা পরীক্ষা করো ঃ

$$f(x) = x^2 - 4x - 3, \quad x \in [1, 4]$$

7. Evaluate the following integrals :

নিচের অনুকলনের মান নির্ণয় করো ঃ

*(i)* $\int \frac{\sin 2x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx, \quad a \neq b$ 4

**OR / অথবা**

$\int e^x \cos x \, dx$ 4

*(ii)* Prove that $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx, \quad a > 0$.

Hence evaluate

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$$ 2+2=4

প্রমাণ করো যে $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx, \quad a > 0$

এর সাহায্যে

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$ এর মান বের করো।

**OR / অথবা**

$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ 4

8. Solve : 4

সমাধান করো ঃ

$$\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}-xy=1$$ 4

**OR / অথবা**

$$\left(x^2+xy\right)dy=\left(x^2+y^2\right)dx$$ 4

9. Solve the differential equation : 4

নিচের অবকল সমীকরণটির সমাধান করো ঃ

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

10. Express the vector $\vec{a}=5\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ as the sum of two vectors such that one is parallel to the vector $\vec{b}=3\hat{i}+\hat{k}$ and the other is perpendicular to $\vec{b}$. 4

ভেক্টর $\vec{a}=5\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ কে দুটি ভেক্টরের যোগফল হিসাবে এমনভাবে প্রকাশ করো যাতে একটি ভেক্টর $\vec{b}=3\hat{i}+\hat{k}$ ভেক্টরের সঙ্গে সমান্তরাল ও অন্যটি $\vec{b}$-এর সঙ্গে লম্ব হয়।

**OR / অথবা**

Show that the vector of magnitude $\sqrt{51}$ which makes equal angles with the vectors $\vec{a}=\frac{1}{3}\left(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right)$, $\vec{b}=\frac{1}{5}\left(-4\hat{i}-3\hat{k}\right)$ and $\vec{c}=\hat{j}$ is $-5\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$. 4

একটি ভেক্টর যার মাপাংক $\sqrt{51}$ ও ভেক্টর $\vec{a}=\frac{1}{3}\left(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right)$, $\vec{b}=\frac{1}{5}\left(-4\hat{i}-3\hat{k}\right)$ ও $\vec{c}=\hat{j}$ -এর সঙ্গে সমান কোণ করে থাকে। দেখাও যে, ভেক্টরটি $-5\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$ হবে।

11. Find the length and the foot of the perpendicular from the point $(1, 1, 2)$ to the plane $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}\right)+5=0$. 4

$(1, 1, 2)$ বিন্দু থেকে $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}\right)+5=0$ সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য ও লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করো।

***OR / অথবা***

Find the equation of the line through the point $(-1, 2, 3)$ which is perpendicular to the lines $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ and $\frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$. 4

$(-1, 2, 3)$ বিন্দুর মধ্য দিয়ে যাওয়া এবং $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ ও $\frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$ রেখা দুটির সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

12. Two dice are thrown. Find the probability that the sum of the numbers coming up on them is 9, if it is known that the number 5 always occurs on the first die. 4

দুটি লুডোর ঘুটি নিক্ষেপ করা হল। সম্ভাবিতা নির্ণয় করো যাতে দুটি ঘুটি থেকে পাওয়া সংখ্যার যোগফল 9 হয়, যদি এটা জানা যায় যে, প্রথম লুডোর ঘুটি থেকে পাওয়া সংখ্যা সবসময়ই 5 সংখ্যা হয়।

**OR / অথবা**

A bag contains 2 red and 4 black balls, another bag contains 3 red and 3 black balls. One of the two bags is selected at random and a ball is drawn from a bag which is found to be red. Find the probability that the ball is drawn from the first bag. 4

একটি থলিতে (ব্যাগ) 2টি লাল এবং 4টি কালো বল আছে। অন্য একটি থলিতে (ব্যাগ) 3টি লাল ও 3টি কালো বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাবে একটি থলি (ব্যাগ) নেওয়া হল এবং তার থেকে একটি বল তুলে নেওয়া হল। যদি নির্বাচিত বলটি লাল হয়, তাহলে ঐটির প্রথম থলিটি থেকে নেবার সম্ভাবিতা নির্ণয় করো।

13. If $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, find $A^{-1}$.

Using $A^{-1}$ solve the system of equations.

$$2x - 3y + 5z = 11$$
$$3x + 2y - 4z = -5$$
$$x + y - 2z = -3$$

6

যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ হয়, তাহলে $A^{-1}$ বের করো।

$A^{-1}$-এর মান ব্যবহার করে নিচের সরলসহকারে সমীকরণগুলির সমাধান করো।

$$2x - 3y + 5z = 11$$
$$3x + 2y - 4z = -5$$
$$x + y - 2z = -3$$

**OR / অথবা**

If $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, find $f(A)$

where $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Also find $A^{-1}$. 6

যদি $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ তাহলে $f(A)$-এর মান বের করো

যেখানে $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

পুনরায় $A^{-1}$-এর মান নির্ণয় করো।

14. Find the equation of the tangents to the curve

$$y = \cos(x+y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi$$

that are parallel to the line $x + 2y = 0$ 6

$x + 2y = 0$ রেখার সমান্তরাল হওয়া,

$y = \cos(x+y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi$ বক্রের স্পর্শকের সমীকরণগুলি নির্ণয় করো।

**OR / অথবা**

Find the local maximum and local minimum values, if any, of the following functions : 3+3=6

নিচের ফলন দুটির যদি স্থানীয় গরিষ্ঠ ও স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান থাকে, নির্ণয় করো ঃ

(i) $f(x) = \sin x + \cos x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(ii) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, \quad x > 0$

15. Evaluate $\int_0^4 \left(x + e^{2x}\right) dx$ as the limit of a sum. 6

$\int_0^4 \left(x + e^{2x}\right) dx$ কে যোগফলের সীমা হিসাবে প্রকাশ করে মান নির্ণয় করো।

16. Find the area lying above the $x$-axis and included between the curves $x^2 + y^2 = 8x$ and $y^2 = 4x$. 6

$x$ - অক্ষের উপর এবং $x^2 + y^2 = 8x$ ও $y^2 = 4x$ বক্র দুটি দ্বারা ঘিরে থাকা অংশটির কালি নির্ণয় করো।

**OR / অথবা**

Prove that the curves $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ divide the area of the square bounded by $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ and $y = 4$ into three equal parts. 6

প্রমাণ করো যে, $x=0$, $x=4$, $y=0$ এবং $y=4$ রেখাগুলি দ্বারা পরিবেষ্টিত বর্গক্ষেত্রকে, $y^2=4x$ ও $x^2=4y$ রেখাদ্বয় সমান তিনটি অংশে বিভক্ত করে।

17. Find the Cartesian as well as the vector equation of the planes passing through the intersection of the planes. $\vec{r}.\left(2\hat{i}+6\hat{j}\right)+12=0$ and $\vec{r}.\left(3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)=0$, which are at unit distance from the origin. 6

মূল বিন্দু থেকে একক দূরত্বে থাকা $\vec{r}.\left(2\hat{i}+6\hat{j}\right)+12=0$ ও $\vec{r}.\left(3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)=0$ সমতল দুটির ছেদনের মধ্য দিয়ে যাওয়া সমতলের কার্টেসীয় ও ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

***OR / অথবা***

Find the distance of the point $(-2, 3, -4)$ from the line $\frac{x+2}{3}=\frac{2y+3}{4}=\frac{3z+4}{5}$ measured parallel to the plane $4x+12y-3z+1=0$. 6

$\frac{x+2}{3}=\frac{2y+3}{4}=\frac{3z+4}{5}$ রেখা থেকে $(-2, 3, -4)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করো যা $4x+12y-3z+1=0$ সমতলের সঙ্গে সমান্তরাল।

18. Solve the Linear Programming Problem graphically.

লৈখিক নিয়মে নিচের রৈখিক প্রগ্রামিং সমস্যাটির সমাধান করো।

Maximize and Minimize $Z = 5x + 3y$

subject to $3x + 5y \leq 15$,

$5x + 2y \leq 10$,

and $x, y \geq 0$ 6

$Z = 5x + 3y$-এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বের করো

যেখানে $3x + 5y \leq 15$,

$5x + 2y \leq 10$,

এবং $x, y \geq 0$

***OR / অথবা***

Maximize and Minimize $Z = 3x + 9y$

subject to $x + 3y \leq 60$,

$x + y \geq 10$,

$x \leq y$,

and $x, y \geq 0$ 6

$Z = 3x + 9y$-এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বের করো

যেখানে

$x + 3y \leq 60$,

$x + y \geq 10$,

$x \leq y$,

ও $x, y \geq 0$

19. Two cards are drawn successively without replacement from a well shuffled pack of 52 cards. Find the mean, and the variance of the number of Queens. 6

52 টি তাসের পাতা ভালোভাবে মিশিয়ে প্যাক (গুচ্ছ) থেকে দুটি তাস একাদিক্রমে পুনঃস্থাপন না করে টানা হল। রাণীর সংখ্যার মাধ্য ও প্রসরণ নির্ণয় করো।

***OR / অথবা***

Six coins are tossed simultaneously. Find the probability of getting

*(i)* 3 heads,

*(ii)* no head,

*(iii)* at least one head. 6

6টি মুদ্রা একসঙ্গে টস্ করলে নিম্নলিখিতগুলির সম্ভাবিতা নির্ণয় করো, যাতে —

*(i)* 3টি মাথা বের হয়,

*(ii)* কোনো মাথা প্রাপ্ত হয় না

*(iii)* অতি কমেও একটি মাথা প্রাপ্ত হয়।

———×———