Paper-2

JEE Advanced, 2017

Part III: Mathematics

Read the instructions carefully:

General:

1. This sealed booklet is your Question Paper. Do not break the seal till you are instructed to do so.

2. The question paper CODE is printed on the left hand top corner of this sheet and the right hand top corner of the back cover of this booklet.

3. Use the Optical Response Sheet (ORS) provided separately for answering the questions.

4. The paper CODE is printed on its left part as well as the right part of the ORS. Ensure that both these codes are identical and same as that on the question paper booklet. If not, contact the invigilator.

5. Blank spaces are provided within this booklet for rough work.

6. Write your name and roll number in the space provided on the back cover of this booklet.

7. After breaking the seal of the booklet at 2:00 pm, verify that the booklet contains 36 pages and that all the 54 questions along with the options are legible. If not, contact the invigilator for replacement of the booklet.

8. You are allowed to take away the Question Paper at the end of the examination.

Optical Response Sheet

9. The ORS (top sheet) will be provided with an attached Candidate's Sheet (bottom sheet). The Candidate's Sheet is a carbon – less copy of the ORS.

10. Darken the appropriate bubbles on the ORS by applying sufficient pressure. This will leave an impression at the corresponding place on the Candidate's Sheet.

11. The ORS will be collected by the invigilator at the end of the examination.

12. You will be allowed to take away the Candidate's Sheet at the end of the examination.

13. Do not tamper with of mutilate the ORS. Do not use the ORS for rough work.

14. Write your name, roll number and code of the examination center, and sign with pen in the space provided for this purpose on the ORS. Do not write any of these details anywhere else on the ORS. Darken the appropriate bubble under each digit of your roll number.

Darken the Bubbles on the ORS

15. Use a Black Ball Point Pen to darken the bubbles on the ORS.

16. Darken the bubble completely.

17. The correct way of darkening a bubble is as:

18. The ORS is machine – gradable. Ensure that the bubbles are darkened in the correct way.

19. Darken the bubbles only if you are sure of the answer. There is no way to erase or "un–darken" a darkened bubble.

SECTION – 1 : (Maximum Marks : 21)

- This section contains **SEVEN** questions
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONLY ONE** of these four options is correct.
- For each question, darken the bubble corresponding to the correct option in the ORS.
- For each question, marks will be awarded in one of the following categories :
  Full Marks : +3 If only the bubble corresponding to the correct option is darkened.
  Zero Marks : 0 If none of the bubbles is darkened.
  Negative Marks : –1 In all other cases.

खंड 1 : (अधिकतम अंक : 21)

- इस खंड में **सात** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प (A), (B), (C) तथा (D) हैं। जिनमें **केवल एक विकल्प सही है।**
- प्रत्येक प्रश्न के लिए ओ.आर.एस. पर सही उत्तर विकल्प के अनुरूप बुलबुले को काला करें।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए अंक निम्नलिखित परिस्थितियों में से **किसी एक के अनुसार दिये जायेंगे :**
- पूर्ण अंक : +3 यदि सिर्फ सही विकल्प के अनुरूप बुलबुले को काला किया है।
  शून्य अंक : 0 यदि किसी भी बुलबुले को काला नहीं किया है।
  ऋण अंक : –1 अन्य सभी परिस्थितयों में।

37. If $f : R \to R$ is a twice differentiable function such that $f''(x) > 0$ for all $x \in R$, and $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1$, then

यदि $f : R \to R$ एक इस प्रकार का द्विअवकलनीय (twice differentiable) फलन है कि सभी $x \in R$ के लिए $f''(x) > 0$, एवम् $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1$ है, तब

(A) $f'(1) \le 0$ (B) $f'(1) > 1$ (C) $0 < f'(1) \le \frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2} < f'(1) \le 1$

Ans. **(B)**

Sol. $f''(x) > 0$ for all $x \in R$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1) = 1$

$\Rightarrow f'(x)$ increases

Let $g(x) = f(x) - x$, $x \in [1/2,1]$

Then $g'(x) = 0$ has atleast one real root in $(1/2,1)$

$f'(x) = 1$ has atleast one real root in $(1/2,1)$

Hence $f'(x)$ increases $\Rightarrow f'(1) > 1$

Hindi x के सभी वास्तविक मानों के लिए $f''(x) > 0$, $f(1/2) = 1/2$, $f(1) = 1$

$\Rightarrow f'(x)$ वर्धमान है

माना $g(x) = f(x) - x$, $x \in [1/2,1]$

तब $g'(x) = 0$, अन्तराल $(1/2,1)$ में कम से कम एक वास्तविक मूल रखता है।

$f'(x) = 1$ अन्तराल $(1/2,1)$ में कम से कम एक वास्तविक मूल रखता है।

अत : $f'(x)$ वर्धमान है $\Rightarrow f'(1) > 1$

38. If y = y(x) satisfies the differential equation $8\sqrt{x}\left(\sqrt{9+\sqrt{x}}\right)dy = \left(\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}\right)^{-1} dx$, x > 0 and y (0) = $\sqrt{7}$, then y(256) =

यदि y = y(x) अवकलनीय समीकरण (differential equation) $8\sqrt{x}\left(\sqrt{9+\sqrt{x}}\right)dy = \left(\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}\right)^{-1} dx$, x > 0 को सन्तुष्ट करता है एवम् y (0) = $\sqrt{7}$ है, तब y(256) =

(A) 16 (B) 3 (C) 9 (D) 80

Ans. **(B)**

Sol. $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\sqrt{4+\sqrt{9+x}}\right)^{-1}}{8\sqrt{x}\sqrt{9+\sqrt{x}}}$

$dy = \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{9+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{8\sqrt{x}} dx$

Let माना 4 + $\sqrt{9+\sqrt{x}} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{9+\sqrt{x}}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$

$\int dy = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2} dt$

y = $\sqrt{t} + c$

y = $\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}$ + c

at x = 0 पर , y = $\sqrt{7}$

$\Rightarrow \sqrt{7} = \sqrt{7} + c \Rightarrow c = 0$

y = $\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}$

at x = 256 पर $\Rightarrow$ y = $\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{256}}}$ = 3

39. How many 3 × 3 matrices M with entries from {0, 1, 2} are there, for which the sum of the diagonal entries of $M^T M$ is 5 ?

ऐसे कितने 3 × 3 आव्यूह M हैं जिनकी प्रविष्टियाँ (entries) {0, 1, 2} में हैं एवम् $M^T M$ की विकर्णीय प्रविष्टियों (diagonal elements) का योग 5 है?

(A) 198 (B) 162 (C) 126 (D) 135

Ans. **(A)**

Sol. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 = 5$

Case स्थिति -I : Five पाँच (1's) and four और चार (0's)

$^9C_5 = 126$

Case- स्थिति II : One एक (2) and one और एक (1)

$^9C_2 \times 2! = 72$

$\therefore$ Total कुल = 198

40. Three randomly chosen nonnegative integers x, y and z are found to satisfy the equation x + y + z = 10. Then the probability that z is even, is

यह पाया गया है कि यादृच्छिक (randomly) रूप से चयनित तीन अऋणात्मक पूर्णांक (nonnegative integers) x, y एवम् z समीकरण x + y + z = 10 को सन्तुष्ट करते हैं। तब z के सम (even) होने की प्रायिकता (probability) हैं

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{36}{55}$ (C) $\frac{6}{11}$ (D) $\frac{5}{11}$

Ans. **(C)**

Sol. $x + y + z = 10$

Total number of non-negative solutions = ${}^{10+3-1}C_{3-1} = {}^{12}C_2 = 66$

Now Let z = 2n.

$x + y + 2n = 10$; $n \geq 0$

Total number of non-negative solutions = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36

Required probability = $\frac{36}{66} = \frac{6}{11}$

Hindi $x + y + z = 10$

अऋणात्मक हलों की कुल संख्या = ${}^{10+3-1}C_{3-1} = {}^{12}C_2 = 66$

अब माना z = 2n.

$x + y + 2n = 10$; $n \geq 0$

अऋणात्मक हलों की कुल संख्या = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36

अभिष्ट प्रायिकता = $\frac{36}{66} = \frac{6}{11}$

41. Let S = {1, 2, 3, ..., 9}. For k = 1, 2,......,5, let N_k be the number of subsets of S, each containing five elements out of which exactly k are odd. Then $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 =$

माना कि S = {1, 2, 3, ..., 9} है। k = 1, 2,......,5 के लिये, माना कि N_k, समुच्चय S के उन उपसमुच्चयों की सँख्या है जिनमें प्रत्येक उपसमुच्चय में 5 अवयव है एवम् इन अवयवों में विषम अवयवों की सँख्या k है। तब

$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 =$

(A) 210 (B) 252 (C) 126 (D) 125

Ans. **(C)**

Sol. $N_1 = {}^5C_1 . {}^4C_4 = 5$

$N_2 = {}^5C_2 . {}^4C_3 = 40$

$N_3 = {}^5C_3 . {}^4C_2 = 60$

$N_4 = {}^5C_4 . {}^4C_1 = 20$

$N_5 = {}^5C_5 . {}^4C_0 = 1$

$\therefore$ Total कुल = 126

42. Let O be the origin and let PQR be an arbitrary triangle. The point S is such that

$\overline{OP} . \overline{OQ} + \overline{OR} . \overline{OS} = \overline{OR} . \overline{OP} + \overline{OQ} . \overline{OS} = \overline{OQ} . \overline{OR} + \overline{OP} . \overline{OS}$

Then the triangle PQR has S as its

(A) centroid (B) orthocenter

(C) incentre (D) circumcenter

माना कि O मूलबिन्दु (origin) है एवम् PQR एक स्वेच्छिक त्रिभुज (arbitrary triangle) है। बिन्दु S इस प्रकार है कि

$\overrightarrow{OP}\,.\,\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\,.\,\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR}\,.\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\,.\,\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ}\,.\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OP}\,.\overrightarrow{OS}$

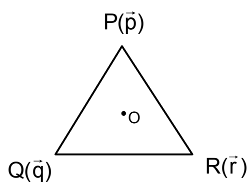
तब बिन्दु S त्रिभुज PQR का है

(A) केन्द्रक(centroid) (B) लम्बकेन्द्र (orthocenter)

(C) अन्तःकेन्द्र (incentre) (D) परिवृत्तकेन्द्र (circumcenter)

Ans. **(B)**

Sol.



$\vec{p}.\vec{q} + \vec{r}.\vec{s} = \vec{r}.\vec{p} + \vec{q}.\vec{s} = \vec{q}.\vec{r} + \vec{p}.\vec{s}$

$\Rightarrow \vec{p}.(\vec{q}-\vec{r}) - \vec{s}.(\vec{q}-\vec{r}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PS}\,.\,\overrightarrow{QR} = 0$

Similarly इसी प्रकार $\overrightarrow{PQ}\,.\,\overrightarrow{SR} = 0$

$\Rightarrow$ S is orthocentre of the triangle (S, त्रिभुज का लम्ब केन्द्र होगा)

43. The equation of the plane passing through the point (1, 1, 1) and perpendicular to the planes $2x + y - 2z = 5$ and $3x - 6y - 2z = 7$, is

समतलों $2x + y - 2z = 5$ एवम् $3x - 6y - 2z = 7$ के लम्बवत् और बिन्दु (1, 1, 1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है

(A) $14x + 2y - 15z = 1$ (B) $-14x + 2y + 15z = 3$

(C) $14x - 2y + 15z = 27$ (D) $14x + 2y + 15z = 31$

Ans. **(D)**

Sol. Let plane be

$a(x - 1) + b(y - 1) + c(z - 1) = 0$

Now, direction ratio of its normal = $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-14) - \hat{j}(2) + \hat{k}(-15)$

So, $-14(x - 1) - 2(y - 1) - 15(z - 1) = 0$

$14x + 2y + 15z = 31$

Hindi. **(D)**

माना समतल

$a(x - 1) + b(y - 1) + c(z - 1) = 0$

अभिलम्ब की द्विकोज्या = $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-14) - \hat{j}(2) + \hat{k}(-15)$

अतः, $-14(x - 1) - 2(y - 1) - 15(z - 1) = 0$

$14x + 2y + 15z = 31$

SECTION – 2 : (Maximum Marks : 28)

- This section contains **SEVEN** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct.
- For each question, darken the bubble(s) corresponding to all the correct option(s) in the ORS.
- For each question, marks will be awarded in one of the following categories :

  Full Marks : +4 If only the bubble(s) corresponding to all the correct option(s) is(are) darkened.

  Partial Marks : +1 For darkening a bubble corresponding **to each correct option,** provided NO incorrect option is darkened.

  Zero Marks : 0 If none of the bubbles is darkened.

  Negative Marks : –2 In all other cases.
- For example, if (A), (C) and (D) are all the correct options for a question, darkening all these three will get +4 marks; darkening only (A) and (D) will get +2 marks and darkening (A) and (B) will get –2 marks, as a wrong option is also darkened.

खंड 2 : (अधिकतम अंक : 28)

- इस खंड में **सात** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में **चार** उत्तर विकल्प (A), (B), (C) तथा (D) हैं। जिनमें से **एक या एक से अधिक** विकल्प सही हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए ओ.आर.एस. पर सारे सही उत्तर (उत्तरों) के अनुरूप बुलबुले (बुलबुलों) को काला करें।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए अंक निम्नलिखित परिस्थितियों में से **किसी एक के अनुसार दिये जायेंगे :**
- पूर्ण अंक : +4 यदि सिर्फ सही विकल्प (विकल्पों) के अनुरूप बुलबुले (बुलबुलों) को काला किया है।

  आंशिक अंक : +1 प्रत्येक सही विकल्प के अनुरूप बुलबुले को काला करने पर, यदि कोई गलत विकल्प काला नहीं किया है।

  शून्य अंक : 0 यदि किसी भी बुलबुले को काला नहीं किया है।

  ऋण अंक : –2 अन्य सभी परिस्थितियों में
- उदाहरण : यदि एक प्रश्न के सारे सही उत्तर विकल्प (A), (C) तथा (D) हैं, तब इन तीनों के अनुरूप बुलबुलों को काले करने पर +4 अंक मिलेंगे ; सिर्फ (A) और (D) के अनुरूप बुलबुलों को काले करने पर +2 अंक मिलेंगे तथा (A) और (B) के अनुरूप बुलबुलों को काले करने पर –2 अंक मिलेंगे क्योंकि एक गलत विकल्प के अनुरूप बुलबुले को भी काला किया गया है।

44. If $f : R \to R$ is a differentiable function such that $f'(x) > 2f(x)$ for all $x \in R$, and $f(0) = 1$, then

(A) $f(x) > e^{2x}$ in $(0, \infty)$

(B) $f'(x) < e^{2x}$ in $(0, \infty)$

(C) $f(x)$ is increasing in $(0, \infty)$

(D) $f(x)$ is decreasing in $(0, \infty)$

यदि $f : R \to R$ इस प्रकार का अवकलनीय (differentiable) फलन है कि सभी $x \in R$, के लिये $f'(x) > 2f(x)$, एवम् $f(0) = 1$ है, तब

(A) $(0, \infty)$ में $f(x) > e^{2x}$

(B) $(0, \infty)$ में $f'(x) < e^{2x}$

(C) $(0, \infty)$ में $f(x)$ वर्धमान (increasing) है

(D) $(0, \infty)$ में $f(x)$ ह्रासमान (decreasing) है

Ans. (A,C)

Sol. $f'(x) - 2f(x) > 0$

$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(f(x).e^{-2x}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = f(x).e^{-2x}$ is an increasing function.

for $x > 0$, $\quad g(x) > g(0)$

$\Rightarrow \quad f(x).e^{-2x} > 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > e^{2x}$

Now $f'(x) > 2f(x) > 2.e^{2x}$

$\therefore \quad f(x)$ is an increasing function

Hindi. **(AC)**

$f'(x) - 2f(x) > 0$

$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(f(x).e^{-2x}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = f(x).e^{-2x}$ वर्धमान फलन है

for $x > 0$, $\quad g(x) > g(0)$

$\Rightarrow \quad f(x).e^{-2x} > 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > e^{2x}$

अब $f'(x) > 2f(x) > 2.e^{2x}$

$\therefore \quad f(x)$ वर्धमान फलन है।

45. If $I = \sum_{k=1}^{98}\int_k^{k+1}\frac{k+1}{x(x+1)}dx$, then

यदि $I = \sum_{k=1}^{98}\int_k^{k+1}\frac{k+1}{x(x+1)}dx$, तब

(A) $I > \log_e 99$ (B) $I < \log_e 99$ (C) $I < \frac{49}{50}$ (D) $I > \frac{49}{50}$

Ans. **(BD)**

Sol. Put $x - k = p$ रखने पर

$$I = \sum_{k=1}^{98}\int_0^1 \frac{k+1}{(k+p)(k+p+1)}dp$$

$$I > \sum_{k=1}^{98}\int_0^1 \frac{k+1}{(k+p+1)^2}dp$$

$$I > \sum_{k=1}^{98}(k+1)\left(\frac{-1}{(k+p+1)}\right)_0^1$$

$I > \sum_{k=1}^{98}(k+1)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$I > \sum_{k=1}^{98}\frac{1}{k+2} = \frac{1}{3}+.........+\frac{1}{100}$

$I > \frac{1}{100}+.....+\frac{1}{100} = \frac{98}{100}$

$I > \frac{49}{50}$

$\sum_{k=1}^{98}\int_{k}^{k+1}\frac{k+1}{x(x+1)}dx$

$\frac{k+1}{x(x+1)} < \frac{k+1}{x(k+1)} (\because \text{least value of } x+1 \text{ is } k+1)$

$\Rightarrow \frac{k+1}{x(x+1)} < \frac{1}{x}$

$\Rightarrow I < \sum_{k=1}^{98}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow I < \sum_{k=1}^{98}\ell n(k+1)-\ell nk \quad \Rightarrow I < \ell n99$

46. If the line $x = \alpha$ divides the area of region $R = \{(x, y) \in R^2 : x^3 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$ into two equal parts, then

यदि रेखा $x = \alpha$ क्षेत्र (region) $R = \{(x, y) \in R^2 : x^3 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$ के क्षेत्रफल को दो बराबर भागों में विभाजित करती है, तब

(A) $2\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 0$ (B) $\alpha^4 + 4\alpha^2 - 1 = 0$ (C) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (D) $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$

Ans. **(AC)**

Sol. $y = x^3$

$\int_0^1 (x-x^3)dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\int_0^\alpha (x-x^3)dx = \frac{1}{8}$

$4\alpha^2 - 2\alpha^4 = 1$

$2\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 0$

$2t^2 - 4t + 1 = 0$ (taking $t = \alpha^2$ लेने पर)

$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4}$

$t = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4}$

$t = \alpha^2 = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \alpha^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$

47. Let α and β be nonzero real numbers such that $2(\cos\beta - \cos\alpha) + \cos\alpha\cos\beta = 1$. Then which of the following is/are true?

माना कि α एवम् β इस प्रकार की अशून्य वास्तविक सँख्यायें (nonzero real numbers) हैं कि $2(\cos\beta - \cos\alpha) + \cos\alpha\cos\beta = 1$. तब निम्न मे से कौन सा(से) सत्य है(हैं) ?

(A) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$ (B) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{3}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$

(C) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{3}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$ (D) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$

Ans. **(BC)**

Sol. $\cos\alpha = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)$; $a = \tan^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\beta = \left(\frac{1-b}{1+b}\right)$; $b = \tan^2\frac{\beta}{2}$

$$2\left(\left(\frac{1-b}{1+b}\right)-\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\right) + \left(\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\left(\frac{1-b}{1+b}\right)\right) = 1$$

$\Rightarrow$ $2((1-b)(1+a) - (1-a)(1+b)) + (1-a)(1-b) = (1+a)(1+b)$

$\Rightarrow$ $2(1 + a - b - ab - (1 + b - a - ab)) + 1 - a - b + ab = 1 + a + b + ab$

$\Rightarrow$ $4(a - b) = 2(a + b)$

$\Rightarrow$ $2a - 2b = a + b$

$\Rightarrow$ $a = 3b$

$\tan^2\frac{\alpha}{2} = 3\tan^2\frac{\beta}{2}$

$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{3}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)$

48. Let $f(x) = \frac{1-x(1+|1-x|)}{|1-x|}\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ for $x \neq 1$. Then

(A) $\lim_{x\to1^+} f(x) = 0$ (B) $\lim_{x\to1^-} f(x)$ does not exist

(C) $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$ (D) $\lim_{x\to1^+} f(x)$ does not exist

माना कि $x \neq 1$ के लिये, $f(x) = \frac{1 - x(1 + |1 - x|)}{|1 - x|} \cos\left(\frac{1}{1 - x}\right)$ । तब

(A) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

(B) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है (does not exist)

(C) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

(D) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है (does not exist)

Ans. **(CD)**

Sol. $f(1^+) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - (1 + h)(1 + h)}{h} \cos\frac{1}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - (1 + h)^2}{h} \cos\frac{1}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 2h}{h} \cos\frac{1}{h}$

$= \lim_{h \to 0} (-h - 2) \cos\frac{1}{h}$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(1^+)$ does not exist विद्यमान नहीं है

$f(1^-) = \lim_{h \to 0} \frac{1 - (1 - h)(1 + h)}{h} \cos\frac{1}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - (1 - h^2)}{h} \cos\frac{1}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} \cos\frac{1}{h}$

$= \lim_{h \to 0} h \cos\frac{1}{h} = 0$

49. If $g(x) = \int_{\sin x}^{\sin(2x)} \sin^{-1}(t)\,dt$, then

यदि $g(x) = \int_{\sin x}^{\sin(2x)} \sin^{-1}(t)\,dt$, तब

(A) $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ (B) $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$ (C) $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ (D) $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$

Ans. **(BONUS)**

Sol. $g(x) = \int_{\sin x}^{\sin 2x} \sin^{-1}(t)\,dt$

$g'(x) = \sin^{-1}(\sin 2x) \cdot \cos 2x \cdot 2 - \sin^{-1}(\sin x) \cdot \cos x$

$= 2\cos 2x \cdot \sin^{-1}(\sin 2x) - \cos x \cdot \sin^{-1}(\sin x)$

$g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(-\pi) \sin^{-1}(\sin(-\pi)) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(\pi) \sin^{-1}(\sin(\pi)) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$

50. If $f(x) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\cos x & \cos x & -\sin x \\ \sin x & \sin x & \cos x \end{vmatrix}$, then

(A) $f(x)$ attains its minimum at x = 0

(B) $f(x)$ attains its maximum at x = 0

(C) $f'(x) = 0$ at more than three points in $(-\pi, \pi)$

(D) $f'(x) = 0$ at exactly three points in $(-\pi, \pi)$

यदि $f(x) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\cos x & \cos x & -\sin x \\ \sin x & \sin x & \cos x \end{vmatrix}$, तब

(A) x = 0 पर $f(x)$ का न्यूनतम (minimum) है

(B) x = 0 पर $f(x)$ का अधिकतम (maximum) है

(C) $(-\pi, \pi)$ में तीन से अधिक बिन्दुओं पर $f'(x) = 0$ है।

(D) $(-\pi, \pi)$ में केवल तीन बिन्दुओं पर $f'(x) = 0$ है।

Ans. **(BC)**

Sol. $f(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \cos 2x & \sin 2x \\ -\cos x & \cos x & -\sin x \\ \sin x & \sin x & \cos x \end{vmatrix}$

$= \cos2x - \cos2x\,(-\cos^2x + \sin^2x) + \sin2x\,(-2\sin x\cos x)$

$f(x) = \cos4x + \cos2x$

$\therefore f(x) = 2\cos^2 2x + \cos2x - 1$

Let माना $\cos2x = t$

$\Rightarrow f(x) = 2t^2 + t - 1$ and $t \in [-1, 1]$

f(x) attains its minima at $t = -\frac{1}{4} \in [-1, 1]$

f(x), $t = -\frac{1}{4} \in [-1, 1]$ पर निम्ननिष्ठ रखता है।

$\therefore\ f(x)|_{min} = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{-9}{8}$

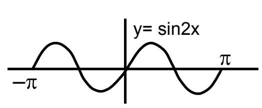
$\therefore\ f(x)|_{max} = 2 + 1 - 1 = 2$……..(when जब $\cos2x = 1$)

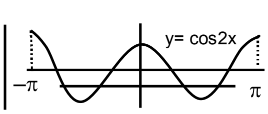
$f'(x) = -4\sin4x - 2\sin2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4\sin4x + 2\sin2x = 0$

$\Rightarrow 8\sin2x\cos2x + 2\sin2x = 0$

$\Rightarrow 2\sin2x(4\cos2x+1) = 0 \ \Rightarrow\ \sin2x = 0$ or या $\cos2x = -\frac{1}{4}$





Hence option अतः विकल्प (B), (C) सही है।

SECTION – 3 : (Maximum Marks : 12)

- This section contains **TWO** paragraphs.
- Based on each paragraph, there are **TWO** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONLY ONE** of these four options is correct.
- For each question, darken the bubble corresponding to the correct integer in the ORS.
- For each question, marks will be awarded in one of the following categories :
  Full Marks : +3 If only the bubble corresponding to the correct answer is darkened.
  Zero Marks : 0 In all other cases.

खंड 3 : (अधिकतम अंक : 12)

- इस खंड में **दो अनुच्छेद** हैं।
- प्रत्येक अनुच्छेद पर आधारित **दो प्रश्न** दिये गये हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प (A), (B), (C) तथा (D) हैं। जिनमें **केवल एक विकल्प सही है।**
- प्रत्येक प्रश्न के लिए ओ. आर. एस. पर सही पूर्णांक के अनुरूप बुलबुले को काला करें।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए अंक निम्नलिखित परिस्थितियों में से किसी एक के अनुसार दिये जायेंगे :
- पूर्ण अंक : +3 यदि सिर्फ सही उत्तर के अनुरूप बुलबुले को काला किया है।
  शून्य अंक : 0 अन्य सभी परिस्थितियों में

PARAGRAPH 1

Let O be the origin, and $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ be three unit vectors in the directions of the sides $\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{PQ}$, respectively, of a triangle PQR.

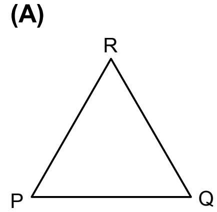
अनुच्छेद 1

माना कि O मूलबिन्दु (origin) है एवम् $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}$ क्रमशः त्रिभुज PQR की भुजायें $\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{PQ}$, की दिशाओ मे तीन एकक सदिश (unit vectors) है।

51. If the triangle PQR varies, then the minimum value of cos(P + Q) + cos(Q + R) + cos(R + P) is
यदि त्रिभुज PQR परिवर्ती है (If the triangle PQR varies), तब, cos(P + Q) + cos(Q + R) + cos(R + P) का न्यूनतम मान (minimum value) है

(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $-\frac{5}{3}$

Ans. **(A)**



Sol.
cos(P + Q) + cos(Q + R) + cos(R + P) = –cosR – cosP – cosQ

In any किसी त्रिभुज में Δ, max of cosP + cosQ + cosR = $\frac{3}{2}$

So minimum value of the given expression is $-\frac{3}{2}$

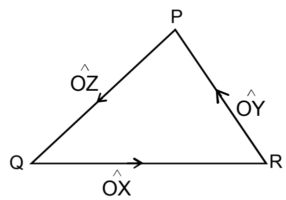
अतः दिए गए व्यंजक का न्यूनतम मान $-\frac{3}{2}$

52. $|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}| =$

(A) sin(P + Q) (B) sin(P + R) (C) sin(Q + R) (D) sin2R

Ans. **(A)**

Sol.



$\cos R = -\ \hat{OX}.\ \hat{OY}$

$\Rightarrow |\cos R| = |\hat{OX}.\ \hat{OY}|$

$|\hat{OX} \times \hat{OY}| = |\sin R| = |\sin(\pi - (P + Q))| = |\sin(P + Q)| = \sin(P + Q)$

PARAGRAPH 2

Let p, q be integers and let α, β be the roots of the equation, $x^2 - x - 1 = 0$ where $\alpha \neq \beta$. For n = 0,1,2,...., let $a_n = p\alpha^n + q\beta^n$.

FACT : If a and b are rational numbers and $a + b\sqrt{5} = 0$, then a = 0 = b.

अनुच्छेद 2

माना कि p, q पूर्णाक है एवम् α, β समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ के मूल है, जहां $\alpha \neq \beta$ है। n = 0,1,2,...., के लिये माना कि $a_n = p\alpha^n + q\beta^n$ है।

तथ्य : यदि a एवम b परिमेय सँख्यायें (rational numbers) हैं एवम् $a + b\sqrt{5} = 0$ है, तब a = 0 = b है।

53. $a_{12} =$

(A) $a_{11} + 2a_{10}$ (B) $2a_{11} + a_{10}$ (C) $a_{11} - a_{10}$ (D) $a_{11} + a_{10}$

Ans. **(D)**

Sol. As α and β are roots of equation $x^2 - x - 1 = 0$, we get :

जैसा कि α और β समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$, के मूल है।

अतः $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \quad \Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$

$\beta^2 - \beta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \beta^2 = \beta + 1$

$\therefore a_{11} + a_{10} = p\alpha^{11} + q\beta^{11} + p\alpha^{10} + q\beta^{10}$

$= p\alpha^{10}(\alpha+1) + q\beta^{10}(\beta+1)$

$= p\alpha^{10} \times \alpha^2 + q\beta^{10} \times \beta^2$

$= p\alpha^{12} + q\beta^{12}$

$= a_{12}$

54. If $a_4 = 28$, then $p + 2q =$

यदि $a_4 = 28$ है, तब $p + 2q =$

(A) 14 (B) 7 (C) 21 (D) 12

Ans. **(D)**

Sol. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_4 = a_3 + a_2 = 3a_1 + 2a_0 = 3p\alpha + 3q\beta + 2(p + q)$

As जैसा कि $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, we get

अतः $a_4 = 3p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 3q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2p + 2q = 28$

$\Rightarrow \left(\frac{3p}{2} + \frac{3q}{2} + 2p + 2q - 28\right) = 0$ ....(i)

and और $\frac{3p}{2} - \frac{3q}{2} = 0$ ....(ii)

$\Rightarrow$ p = q (from (ii) से)

$\Rightarrow$ 7p = 28 (from (i) and व (ii) से)

$\Rightarrow$ p = 4

$\Rightarrow$ q = 4

$\Rightarrow$ p + 2q = 12