Series : OSR/1

कोड नं.
Code No. **65/1/2**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **8** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **8** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे] *[अधिकतम अंक : 100*
Time allowed : 3 hours] *[Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं जो **तीन** खण्डों में विभाजित हैं : **अ, ब** तथा **स** । खण्ड अ में **10** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड **ब** में **12** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड **स** में **7** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।*

(iii) *खण्ड **अ** में सभी प्रश्नों के उत्तर **एक** शब्द, **एक** वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी **चार** अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा **छः** अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प हैं । ऐसे **सभी** प्रश्नों में से आपको **एक** ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । आवश्यकता पड़ने पर आप लघुगणकीय सारणी माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) *All questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of 29 questions divided into* ***three*** *sections* ***A, B*** *and* ***C.*** *Section –* ***A*** *comprises of* ***10*** *questions of* ***one*** *mark each, Section –* ***B*** *comprises of* ***12*** *questions of* ***four*** *marks each and Section –* ***C*** *comprises of* ***7*** *questions of* ***six*** *marks each.*

(iii) ***All*** *questions in Section –* ***A*** *are to be answered in* ***one*** *word,* ***one*** *sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in* ***4*** *questions of* ***four*** *marks each and* ***2*** *questions of* ***six*** *marks each. You have to attempt only* ***one*** *of the alternatives in* ***all*** *such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड – अ

SECTION – A

प्रश्न संख्या **1** से **10** तक प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।

Question numbers **1** to **10** carry **1** mark each.

1. सदिश $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ का सदिश $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए ।

Find the projection of the vector $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ on the vector $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$.

2. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (a, b, c) से होकर जाता है तथा समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2$ के समांतर है ।

Write the vector equation of the plane, passing through the point (a, b, c) and parallel to the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2$.

3. $\left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रति-अवकलज लिखिए ।

Write the antiderivative of $\left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

4. यदि $2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ है, तो $(x - y)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$, find $(x - y)$.

5. निम्न आव्यूह समीकरण को x के लिए हल कीजिए :, $[x \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = O$.

Solve the following matrix equation for x :, $[x \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = O$.

6. यदि $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ है, तो x का मान लिखिए ।

If $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$, write the value of x.

7. यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1} x\right) = 1$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1} x\right) = 1$, then find the value of x.

8. सभी शून्येतर वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में, माना $*$ एक द्विआधारी संक्रिया है, जो सभी $a, b \in R - \{0\}$ के लिए $a * b = \frac{ab}{5}$ द्वारा प्रदत्त है । यदि $2 * (x * 5) = 10$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

Let $*$ be a binary operation, on the set of all non-zero real numbers, given by $a * b = \frac{ab}{5}$ for all $a, b \in R - \{0\}$. Find the value of x, given that $2 * (x * 5) = 10$.

9. मान ज्ञात कीजिए : $\int \cos^{-1} (\sin x)\, dx$.

Evaluate : $\int \cos^{-1} (\sin x)\, dx$.

10. यदि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ इस प्रकार के हैं कि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \frac{2}{3}$ तथा $\vec{a} \times \vec{b}$ एक मात्रक सदिश है, तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण लिखिए ।

If vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are such that, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \frac{2}{3}$ and $\vec{a} \times \vec{b}$ is a unit vector, then write the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$.

खण्ड – ब
SECTION – B

प्रश्न संख्या **11** से **22** तक प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है ।

Question numbers **11** to **22** carry **4** marks each.

11. वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

(a) निरंतर वर्धमान है ।

(b) निरंतर ह्रासमान है ।

अथवा

वक्र $x = a \sin^3\theta$ तथा $y = a \cos^3\theta$ के लिये $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the intervals in which the function $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ is

(a) strictly increasing

(b) strictly decreasing

OR

Find the equations of the tangent and normal to the curve $x = a \sin^3\theta$ and $y = a \cos^3\theta$ at $\theta = \frac{\pi}{4}$.

12. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए : $\int (x - 3)\sqrt{x^2 + 3x - 18}\, dx$

Evaluate : $\int \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

OR

Evaluate : $\int (x - 3)\sqrt{x^2 + 3x - 18}\, dx$

13. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Solve the following differential equation :

$$(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

14. यदि $y = x^x$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x} = 0$.

If $y = x^x$, prove that $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x} = 0$.

15. किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$$

अथवा

सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ ऐसे हैं कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ तथा $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ तथा $|\vec{c}| = 7$ है । $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

Prove that, for any three vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$$

OR

Vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ are such that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ and $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ and $|\vec{c}| = 7$. Find the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$.

16. सिद्ध कीजिए कि $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2}; x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

अथवा

सिद्ध कीजिए कि $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Prove that $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2}; x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

OR

Prove that $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right) + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$.

17. माना $A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ तथा $A \times A$ में R एक संबंध है, जो $A \times A$ में (a, b), (c, d) के लिए (a, b) R (c, d) यदि $a + d = b + c$ द्वारा परिभाषित है । सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है । तुल्यता वर्ग [(2, 5)] भी ज्ञात कीजिए ।

Let $A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ and R be the relation in $A \times A$ defined by (a, b) R (c, d) if $a + d = b + c$ for (a, b), (c, d) in $A \times A$. Prove that R is an equivalence relation. Also obtain the equivalence class [(2, 5)].

18. मान लें कि जन्म लेने वाले बच्चे का लड़का या लड़की होना समसंभाव्य है । यदि किसी परिवार में दो बच्चे हैं, तो दोनों बच्चों के लड़की होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह दिया गया है कि

(i) सबसे छोटा बच्चा लड़की है ।

(ii) कम से कम एक बच्चा लड़की है ।

Assume that each born child is equally likely to be a boy or a girl. If a family has two children, what is the conditional probability that both are girls ? Given that

(i) the youngest is a girl.

(ii) atleast one is a girl.

19. सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

Prove the following using properties of determinants :

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

20. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ का $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए ।

Differentiate $\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ with respect to $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

21. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$\operatorname{cosec} x \log y \frac{dy}{dx} + x^2y^2 = 0.$

Solve the following differential equation :

$\operatorname{cosec} x \log y \frac{dy}{dx} + x^2y^2 = 0.$

22. दर्शाइए कि रेखाएँ $\frac{5-x}{-4} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+3}{-5}$ तथा $\frac{x-8}{7} = \frac{2y-8}{2} = \frac{z-5}{3}$ समतलीय हैं ।

Show that the lines $\frac{5-x}{-4} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+3}{-5}$ and $\frac{x-8}{7} = \frac{2y-8}{2} = \frac{z-5}{3}$ are coplanar.

खण्ड – स
SECTION – C

प्रश्न संख्या **23** से **29** तक प्रत्येक प्रश्न **6** अंक का है ।

Question numbers **23** to **29** carry **6** marks each.

23. ग्रामीण क्षेत्र का एक व्यापारी कुछ सिलाई मशीनें खरीदना चाहता है । उसके पास निवेश के लिए केवल ₹ 5,760 हैं तथा भंडारण के लिये अधिक से अधिक 20 नगों के लिये स्थान है । एक इलेक्ट्रॉनिक सिलाई मशीन का मूल्य ₹ 360 है, जबकि एक हाथ से चलाने वाली मशीन का मूल्य ₹ 240 है । वह एक इलेक्ट्रॉनिक मशीन को ₹ 22 लाभ पर बेच सकता है तथा हाथ से चलने वाली मशीन को ₹ 18 लाभ पर । यह मान कर कि वह खरीदे गये सभी नग बेच सकता है, वह राशि का निवेश किस प्रकार करे कि उसे अधिकतम लाभ हो ? उपरोक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।

A dealer in rural area wishes to purchase a number of sewing machines. He has only ₹ 5,760 to invest and has space for at most 20 items for storage. An electronic sewing machine cost him ₹ 360 and a manually operated sewing machine ₹ 240. He can sell an electronic sewing machine at a profit of ₹ 22 and a manually operated sewing machine at a profit of ₹ 18. Assuming that he can sell all the items that he can buy, how should he invest his money in order to maximize his profit ? Make it as a LPP and solve it graphically.

24. ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता खो जाता है । शेष पत्तों में से तीन पत्ते निकाले जाते हैं (यादृच्छया प्रतिस्थापना रहित) जो सभी हुकुम के पाये जाते हैं । खो गए पत्ते के हुकुम के होने की क्या प्रायिकता है ?

अथवा

15 बल्बों के एक ढेर में से, जिसमें 5 त्रुटिपूर्ण बल्ब हैं, एक-एक करके प्रतिस्थापना सहित 4 बल्बों का एक प्रतिदर्श निकाला गया । त्रुटिपूर्ण बल्बों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । अत: बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए ।

A card from a pack of 52 playing cards is lost. From the remaining cards of the pack three cards are drawn at random (without replacement) and are found to be all spades. Find the probability of the lost card being a spade.

OR

From a lot of 15 bulbs which include 5 defectives, a sample of 4 bulbs is drawn one by one with replacement. Find the probability distribution of number of defective bulbs. Hence find the mean of the distribution.

25. दो विद्यालय P तथा Q अपने चुने हुए विद्यार्थियों को अनुशासन, शिष्टता तथा समय का पाबंद होने के मूल्यों पर पुरस्कार देना चाहते हैं । विद्यालय P अपने क्रमश: 3, 2 तथा 1 विद्यार्थियों को इन तीन मूल्यों के लिए क्रमश: ₹ x, ₹ y तथा ₹ z देना चाहता है जबकि इन पुरस्कारों का कुल मूल्य ₹ 1,000 है । विद्यालय Q अपने क्रमश: 4, 1 और 3 विद्यार्थियों को इन मूल्यों के लिए कुल ₹ 1,500 पुरस्कार स्वरूप देना चाहता है (तथा पहले विद्यालय जैसे ही तीन मूल्यों पर वही पुरस्कार राशि देना चाहता है) । यदि इन तीनों मूल्यों पर दिए गए एक-एक पुरस्कार की कुल राशि ₹ 600 है, तो आव्यूहों का प्रयोग करके प्रत्येक मूल्य के लिये दी गई पुरस्कार राशि ज्ञात कीजिए ।

उपरोक्त तीन मूल्यों के अतिरिक्त एक अन्य मूल्य सुझाइए जो पुरस्कार देने के लिए शामिल करना चाहिए ।

Two schools P and Q want to award their selected students on the values of Discipline, Politeness and Punctuality. The school P wants to award ₹ x each, ₹ y each and ₹ z each for the three respective values to its 3, 2 and 1 students with a total award money of ₹ 1,000. School Q wants to spend ₹ 1,500 to award its 4, 1 and 3 students on the respective values (by giving the same award money for the three values as before). If the total amount of awards for one prize on each value is ₹ 600, using matrices, find the award money for each value.

Apart from the above three values, suggest one more value for awards.

26. बिंदुओं A(2, 5, –3), B(–2, –3, 5) तथा C(5, 3, –3) द्वारा निर्धारित समतल की बिंदु (7, 2, 4) से दूरी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

बिंदु (–1, –5, –10) से रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda\,(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ तथा समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the distance between the point (7, 2, 4) and the plane determined by the points A(2, 5, –3), B(–2, –3, 5) and C(5, 3, –3).

OR

Find the distance of the point (–1, –5, –10) from the point of intersection of the line $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda\,(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ and the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$.

27. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 32$, रेखा $y = x$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Find the area of the region in the first quadrant enclosed by the x-axis, the line $y = x$ and the circle $x^2 + y^2 = 32$.

28. मान ज्ञात कीजिए : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x \cdot \operatorname{cosec} x}\, dx.$

Evaluate : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x \cdot \operatorname{cosec} x}\, dx.$

29. सिद्ध कीजिए कि दिए गए आयतन तथा न्यूनतम वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले लंबवृत्तीय शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\cot^{-1}\sqrt{2}$ होता है ।

Prove that the semi-vertical angle of the Right circular cone of given volume and least curved surface area is $\cot^{-1}\sqrt{2}$.

QUESTION PAPER CODE 65/1/2

EXPECTED ANSWERS/VALUE POINTS

SECTION - A

Marks

1-10. 1. 5 2. $\left\{\vec{r} - \left(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}\right)\right\} \cdot \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) = 0$

or

$$\vec{r} \cdot \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) = a + b + c$$

3. $2x^{3/2} + 2\sqrt{x} + c$ 4. 10 5. $x = 2$

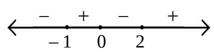
6. $x = \pm 6$ 7. $x = \frac{1}{5}$ 8. $x = 25$

9. $\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + c$ 10. $\frac{\pi}{6}$ $1 \times 10 = 10$ m

SECTION - B

11. $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2)$ 1+½ m

$f'(x) > 0, \ \forall x \in (-1, 0) \cup (2, \infty)$ 1 m



$f'(x) < 0, \ \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$ 1 m

$\therefore$ f(x) is strictly increasing in $(-1, 0) \cup (2, \infty)$

and strictly decreasing in $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$ ½ m

OR

Point at $\theta = \pi/4$ is $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$ ½ m

$\frac{dy}{d\theta} = -3a\cos^2\theta \sin\theta; \ \frac{dx}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$ 1 m

$\therefore$ slope of tangent at $\theta = \frac{\pi}{4}$ is $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{\theta = \frac{\pi}{4}} = \left.\frac{-3a\cos^2\theta\sin\theta}{3a\sin^2\theta\cos\theta}\right]_{\theta = \frac{\pi}{4}}$

$$= -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$ 1 m

Equation of tangent at the point :

$$y - \frac{a}{2\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x + y - \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$$ 1 m

Equation of normal at the point :

$$y - \frac{a}{2\sqrt{2}} = 1\left(x - \frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x - y = 0$$ ½ m

12. $$\int \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x\right]}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\, dx$$ 1½ m

$$= \int \left[\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - 3\right] dx$$

$$= \int \left[\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - 3\right] dx$$ ½ m

$$= \int \left(\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x - 3\right) dx$$ ½ m

$$= \tan x - \cot x - 3x + c$$ 1½ m

(Accept $-2\cot 2x - 3x + c$ also)

OR

$$\int (x-3)\sqrt{x^2 + 3x - 18}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x+3)\sqrt{x^2 + 3x - 18}\, dx - \frac{9}{2}\int \sqrt{x^2 + 3x - 18}\, dx$$ 1 m

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(x^2 + 3x - 18\right)^{3/2} - \frac{9}{2}\int \sqrt{\left(x + 3/2\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2}\, dx$$ 1½ m

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 + 3x - 18\right)^{3/2} - \frac{9}{2}$$

$$\left\{\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)}{2}\sqrt{x^2 + 3x - 18} - \frac{81}{8}\log\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x - 18}\right| + c\right.$$ 1½ m

or $\quad = \frac{1}{3}\left(x^2+3x-18\right)^{3/2} - \frac{9}{8}$

$$\left\{ (2x+3)\sqrt{x^2+3x-18} - \frac{81}{2}\log\left| x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x-18}\right| + c\right.$$

13. Given differential equation can be written as

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2-1}\,y = \frac{2}{\left(x^2-1\right)^2} \qquad 1\text{ m}$$

Integrating factor $= e^{\int \frac{2x}{x^2-1}dx} = e^{\log(x^2-1)} = x^2-1$ 1 m

$\therefore$ Solution is $\quad y\cdot(x^2-1) = \int \frac{2}{(x^2-1)^2}\cdot(x^2-1)\,dx + c$ 1 m

$$\Rightarrow \quad y\,(x^2-1) = 2\int \frac{1}{x^2-1}\,dx + c$$

$$\Rightarrow \quad y\,(x^2-1) = \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c \qquad 1\text{ m}$$

14. $y = x^x \quad \therefore \ \log y = x\log x,$ Taking log of both sides ½ m

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + 1,$ Diff. w r t "x" 1½ m

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x},$ Diff. w r t "x" 1½ m

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x} = 0$ ½ m

15. $\left[\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}\right] = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left\{\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)\right\}$ ½ m

$= \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left\{\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right\}$ 1 m

$$= \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{b}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$ 1½ m

$$+\ \vec{b}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$$

$$\left\{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right),\ \left\{\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=0\right\}\right.$$

$$= 2\ \left\{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right\}=2\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$$ 1 m

OR

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\quad\therefore\quad\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$$ ½ m

$$\Rightarrow\ \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(-\vec{c}\right)^2=\left(\vec{c}\right)^2$$ ½ m

$$\Rightarrow\ \left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{c}\right|^2$$ 1 m

$$\Rightarrow\ 9+25+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=49,\quad \theta \text{ being angle between } \vec{a}\ \&\ \vec{b}$$ 1 m

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{15}{2\cdot3\cdot5}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\theta=\frac{\pi}{3}$$ 1 m

16. $\cot^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right\}$

$$= \cot^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right\}$$ 2½ m

$$= \cot^{-1}\left\{\frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right\} = \cot^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$ 1½ m

OR

$$\text{LHS} = 2\left(\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8}\right) + \sec^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{7}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{40}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$ 1½+½ m

$$= 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\left(\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$ 1 m

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{25}{25} = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = \text{RHS}$$ 1 m

17. $\forall\ (a, b) \in A \times A$

$a + b = b + a \quad \therefore\ (a, b)\ R\ (a, b) \quad \therefore$ R is reflexive 1 m

For $(a, b), (c, d) \in A \times A$

If $(a, b)\ R\ (c, d)$ i.e. $a + d = b + c \Rightarrow c + b = d + a$

then $(c, d)\ R\ (a, b)$ $\therefore$ R is symmetric 1 m

For $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times A$

If $(a, b)\ R\ (c, d)$ & $(c, d)\ R\ (e, f)$ i.e. $a + d = b + c$ & $c + f = d + e$

Adding, $a + d + c + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e$

then (a, b) R (e, f) $\therefore$ R is transitive 1 m

$\therefore$ R is reflexive, symmetric and transitive

hence R is an equivalance relation ½ m

[(2, 5)] = {(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)} ½ m

18. let b_2, g_2 be younger boy and girl

and b_1, g_1 be elder, then, sample space of two children is

$S = \{(b_1, b_2), (g_1, g_2), (b_1, g_2), (g_1, b_2)\}$ 1 m

A = Event that younger is a girl = $\{(g_1, g_2), (b_1, g_2)\}$

B = Event that at least one is a girl = $\{(g_1, g_2), (b_1, g_2), (g_1, b_2)\}$

E = Event that both are girls = $\{(g_1, g_2)\}$

(i) $P(E/A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)} = \dfrac{1}{2}$ 1½ m

(ii) $P(E/B) = \dfrac{P(E \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$ 1½ m

19. $\text{LHS} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$ Using, $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ 1 m

$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$ Using, $R_2 \to R_2 - R_1;\ R_3 \to R_3 - R_1$ 2 m

$= 2(a+b+c)\ \{(a+b+c)^2 - 0\}$ Expanding along C_1

$= 2\ (a+b+c)^3 = \text{RHS}$ 1 m

20. let $u = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; $v = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$; $x = \sin\theta \quad \therefore \quad \theta = \sin^{-1}x$

$\therefore \quad u = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\right) = \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta = \sin^{-1}x$ 1 m

& $v = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\sin^{-1}x$ 1 m

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \frac{dv}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ 1 m

$\therefore \quad \frac{du}{dv} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{1}{2}$ 1 m

(In case, if $x = \cos\theta$ then answer is $-\frac{1}{2}$)

21. $\operatorname{cosec} x \cdot \log y \frac{dy}{dx} = -x^2 y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\log y}{y^2} dy = -x^2 \sin x \, dx$ 1 m

Integrating both sides we get

$-\frac{\log y}{y} - \frac{1}{y} = -\left[-x^2\cos x + 2\int x\cos x \, dx\right]$ 1+1 m

$= -\left[-x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int 1\cdot\sin x \, dx\right)\right]$ ½ m

$\therefore \quad \frac{\log y}{y} - \frac{1}{y} = --x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$ ½ m

22. Equations of lines are :

$\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{4} = \frac{z+3}{-5}; \ \frac{x-8}{7} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{3}$ 1 m

Here, $x_1 = 5, \ y_1 = 7, \ z_1 = -3; \quad x_2 = 8, \ y_2 = 4, \ z_2 = 5$
$a_1 = 4, \ b_1 = 4, \ c_1 = -5; \quad a_2 = 7, \ b_2 = 1, \ c_2 = 3$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(17) + 3\,(47) + 8\,(-24) = 0 \qquad 1½+1 \text{ m}$$

$\therefore$ lines are co-planar ½ m

SECTION - C

23. Let x and y be electronic and manually operated sewing machines purchased respectively

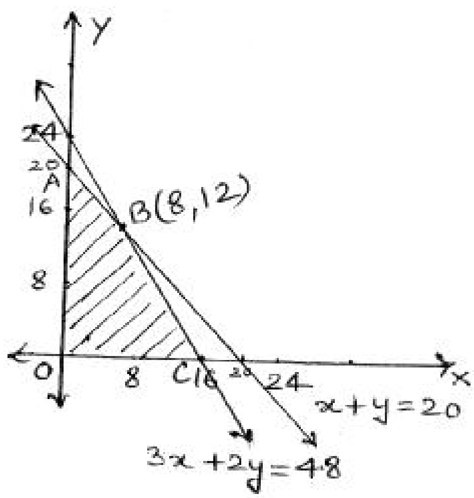
$\therefore$ L.P.P. is Maximize $P = 22x + 18y$ ½ m

subject to $360x + 240y \leq 5760$

or $3x + 2y \leq 48$

$x + y \leq 20$

$x \geq 0,\ y \geq 0$ 2 m



For correct graph 2 m

Vertices of feasible region are

A (0, 20), B(8, 12), C(16, 0) & O(0, 0)

P(A) = 360, P(B) = 392, P(C) = 352 ½ m

$\therefore$ For Maximum P, Electronic machines = 8

Manual machines = 12 1 m

24. Let E_1 : Event that lost card is a spade

E_2 : Event that lost card is a non spade ½ m

A : Event that three spades are drawn without replacement from 51 cards

$$P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad P(E_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad 1 \text{ m}$$

$$P(A/E_1) = \frac{{}^{12}C_3}{{}^{51}C_3}, \quad P(A/E_2) = \frac{{}^{13}C_3}{{}^{51}C_3} \qquad 1½ \text{ m}$$

$$P(E_1/A) = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{^{12}C_3}{^{51}C_3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{^{12}C_3}{^{51}C_3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{^{13}C_3}{^{51}C_3}}$$ 1+1 m

$$= \frac{10}{49}$$ 1 m

OR

X = No. of defective bulbs out of 4 drawn = 0, 1, 2, 3, 4 1 m

Probability of defective bulb = $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ½ m

Probability of a non defective bulb = $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ½ m

Probability distribution is :

x :	0	1	2	3	4	
P(x) :	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	2½ m
x P(x) :	0	$\frac{32}{81}$	$\frac{48}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{4}{81}$	½ m

Mean = $\sum x\, P(x) = \frac{108}{81}$ or $\frac{4}{3}$ 1 m

25. Here
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1000 \\ 4x + y + 3z &= 1500 \\ x + y + z &= 600 \end{aligned}$$ 1½

$$\therefore \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix} \text{ or } A \cdot X = B$$

$|A| = 3(-2) - 2(1) + 1(3) = -5 \neq 0 \;\therefore\; X = A^{-1}B$ ½ m

Co-factors are

$$A_{11} = -2, \quad A_{12} = -1, \quad A_{13} = 3$$
$$A_{21} = -1, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = -1$$ 1½ m
$$A_{31} = 5, \quad A_{32} = -5, \quad A_{33} = -5$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1000 \\ 1500 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad x = 100, \ y = 200, \ z = 300$ 1½ m

i.e. Rs. 100 for discipline, Rs 200 for politeness & Rs. 300 for punctuality

One more value like sincerity, truthfulness etc. 1 m

26. Equation of plane through points A, B and C is

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z+3 \\ -4 & -8 & 8 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16x + 24y + 32z - 56 = 0$$
$$\text{i.e. } 2x + 3y + 4z - 7 = 0$$ 3+1 m

Distance of plane from (7, 2, 4) = $\left| \frac{2(7) + 3(2) + 4(4) - 7}{\sqrt{9+16+4}} \right|$ 1 m

$= \sqrt{29}$ 1 m

OR

General point on the line is $(2+3\lambda)\hat{i} + (-1+4\lambda)\hat{j} + (2+2\lambda)\hat{k}$ 1 m

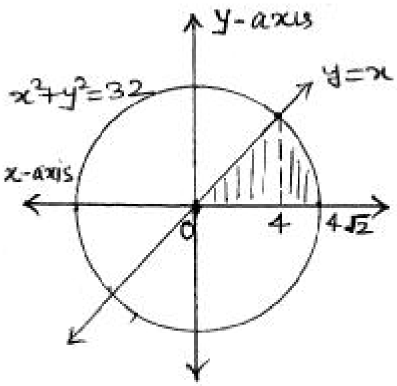
Putting in the equation of plane; we get

$1 \cdot (2+3\lambda) - 1 \cdot (-1+4\lambda) + 1 \cdot (2+2\lambda) = 5$ 1½ m

$\therefore \quad \lambda = 0$ 1 m

Point of intersection is $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ or $(2, -1, 2)$ 1½ m

Distance $= \sqrt{(2+1)^2 + (-1+5)^2 + (2+10)^2} = \sqrt{169} = 13$ 1 m

27. 

Correct Figure 1 m

The line and circle intersect each other at $x = \pm 4$ 1 m

Area of shaded region

$$= \int_0^4 x\,dx + \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 - x^2}\ dx$$ 1½ m

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 + \left[\left\{\frac{x\sqrt{32-x^2}}{2} + 16\sin^{-1}\left(\frac{x}{4\sqrt{2}}\right)\right\}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$ 1½ m

$$= 8 + 4\pi - 8 = 4\pi \text{ sq.units}$$ 1 m

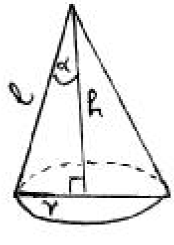
28. Let $I = \int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x \operatorname{cosec} x}\,dx \quad \therefore \quad I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\tan(\pi - x)}{\sec(\pi - x)\operatorname{cosec}(\pi - x)}\,dx$ 1 m

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\tan x}{\sec x \cdot \operatorname{cosec} x}\,dx$$ ½ m

Adding we get, $2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x \cdot \operatorname{cosec} x}\,dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$ 1½ m

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \pi\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg]_0^{\pi/2}$$ 2 m

$$= \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} \quad \therefore \quad I = \frac{\pi^2}{4}$$ 1 m

29. 

For correct fiqure ½ m

let radius, height and slant height of cone

be r, h and $\mathbf{l}$ respectively $\therefore \quad r^2 + h^2 = \mathbf{l}^2$ ½ m

$$V\text{ (volume)} = \frac{\pi}{3} r^2 h, \text{ [V is constant]}$$

$$A = \pi r \mathbf{l}, \quad z = A^2 = \pi^2 r^2 \mathbf{l}^2 = \pi^2 r^2 \left(r^2 + h^2\right) \qquad \text{½ m}$$

$$= \pi^2 r^2 \left(r^2 + \frac{9v^2}{\pi^2 r^4}\right)$$

$$= \pi^2 \left(r^4 + \frac{9v^2}{\pi^2 r^2}\right) \qquad \text{1 m}$$

$$\frac{dz}{dr} = \pi^2 \left(4r^3 - \frac{18v^2}{\pi^2 r^3}\right) \qquad \text{1 m}$$

$$\therefore \frac{dz}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[6]{\frac{9v^2}{2\pi^2}} \qquad \text{½ m}$$

$$\text{At } r = \sqrt[6]{\frac{9v^2}{2\pi^2}}; \; \frac{d^2z}{dr^2} = \pi^2 \left(12r^2 + \frac{54v^2}{\pi^2 r^4}\right) > 0 \qquad \text{1 m}$$

$\therefore$ corved surface area is minimum iff $2\pi^2 r^6 = 9v^2$

i.e. $2\pi^2 r^6 = \pi^2 r^4 h^2$

OR

$$h = \sqrt{2}\, r \qquad \text{½ m}$$

$$\therefore \cot\alpha = \frac{h}{r} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cot^{-1}\left(\sqrt{2}\right) \qquad \text{½ m}$$