Total number of printed pages-6

S.D.H.S.E.B

2023

MATHEMATICS

PRE-FINAL EXAMINATION

Full Marks : 100

Time : Three hours

[The Figures in the margin indicate full marks for the questions.]

1. Answer the following questions
   তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া
   a) If f(x) f:R → R defined by f(x) = x^2–3x+2 find $f(f(x))$ 1
   যদি ফলন f:R → R ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয় (য'ত f(x) = x^2–3x+2 তেন্তে $f(f(x))$ ৰ মান উলিওৱা।
   b) What is range of the function Sin^{-1} 1
   ফলন Sin^{-1} ৰ পৰিসৰ কি ?
   c) Let A be a 3x3 determinant and IAI =8
   Find the value of I2AI 1
   ধৰা এটা 3x3 নিৰ্ণায়ক আৰু IAI =8 তেন্তে I2AI ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।
   d) Find the rate of change of the area of a circle with respect to its radius r when r=3 cm. 1
   ব্যাসাৰ্দ্ধ r ৰ সাপেক্ষে বৃত্তৰ কালিৰ পৰিবৰ্তন হাৰ নিৰ্ণয় কৰা য'ত r=3 cm.
   e) Let IAI=m of B is the matrix obtained by interchanging two raws of A then IBI =? 1
   ধৰা হ'ল IAI=m আৰু B মৌলকক্ষটো A ৰ দুটা শাৰী সাল-সলনি কৰি পোৱা হ'ল তেন্তে IBI=?,
   f) Find the order and the degree of the differential equation. 1
   অৱকল সমীকৰণটোৰ মাত্ৰা আৰু ঘাত নিৰ্ণয় কৰা।
   $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+Sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0$$
   g) Find the direction Cosine of a vector $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$. 1
   $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টৰ দিনাংক উলিওৱা।
   h) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=?$ 1
   i) What is the direction Cosine of Y axis ? 1
   Y অক্ষৰ দিনাংক কি ?
   j) Differentiate e^{x^3} with respect to x 1
   x ৰ সাপেক্ষে e^{x^3} ৰ অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।
2. Let L be the set of all lines in XY plane and R be the relation in L defined as R {(l_1,l_2) : l_1 is parallel to l_2}. Show that R is an equivalance relation. Find the set of all lines related to the line y=2x+4. 4
   ধৰা হ'ল L, XY সমতলত থকা সকলো ৰেখাৰ সংহতি। L সংহতিত R সম্বন্ধটো এনে ধৰণৰ R {(l_1,l_2) : l_1 আৰু l_2 সমান্তৰাল} দেখুওৱা R এটা সমতুল্য সম্বন্ধ। y=2x+4. ৰেখাৰ লগত সম্বন্ধযুক্ত ৰেখাৰ সংহতিটো লিখা।

or

Let $f:\{2,3,4,5\}\rightarrow\{3,4,5,9\}$ and g : {3,4,5,9} →{7,11,15} be function defined as f(2)=3 f(3)=4, f(4)–f(5) =5 and g(3)=g(4)=7 and g(5)=g(9) =11 find gof .

ধৰা হ'ল $f:\{2,3,4,5\}\rightarrow\{3,4,5,9\}$ আৰু g : {3,4,5,9} →{7,11,15} এটা ফলন য'ত f(2)=3, f(3)=4, f(4)–f(5) =5 আৰু g(3)=g(4)=7 আৰু g(5)=g(9) =11 তেন্তে gof ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

3. If $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}$ find the value of x. 4

যদি $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}$ তেন্তে x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

or / নাইবা

Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

4. Show that the points.
A(a, b+c) B (b, c+a) C (c, a+b) are collinear. 4
দেখুওৱা যে A(a, b+c) B (b, c+a) C (c, a+b) বিন্দুবোৰ একেৰেখীয়।

or/ অথবা

Find the matrix X so that (মৌল কক্ষ X নিৰ্ণেয় কৰা যাতে)

$$X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

5. if $x^y+y^x=1$ Find $\dfrac{dy}{dx}$ 4

যদি $x^y+y^x=1$ তেন্তে $\dfrac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা।

or / নাইবা

Prove that the function f(x) given by f(x) = | x–1| $x\in R$ is not differentiable at x=1.
প্ৰমাণ কৰা যে f(x) = |x–1| $x\in R$ ফলনটো x=1 বিন্দুত অৱকলনীয় নহয়।

6. Find the value of a and b such that the function defined by 4

$$f(x)=\begin{cases}5 & \text{if } x\le 2\\ ax+b & \text{if } 2<x<10\\ 21 & \text{if } x\ge 10\end{cases}$$

is a continuous function.
a আৰু b ৰ মান নিৰ্ণেয় কৰা যাতে —

$$f(x)=\begin{cases}5 & \text{if } x\le 2\\ ax+b & \text{if } 2<x<10\\ 21 & \text{if } x\ge 10\end{cases}$$ ফলনটো অবিচিন্ন হয়।

P.T.O.

7. If $e^x(x+1)=1$ show that $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 4

যদি $e^x(x+1)=1$ দেখুওৱা যে $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

8. A ladder 5m long is leaning against a wall. The bottom of the ladder is pulled along the ground away from the wall, at rate of 2cm/s. How fast is its height on the wall decreasing when the foot of the ladder is 4m away from the wall. 4

এটা 5 মিটাৰ দীঘল জখলা এটা বেৰত লাগি আছে। জখলাৰ তলটো বেৰৰ পৰা মাটিৰ ফালে 2ছে.মি./চেকেণ্ড হাৰত টানিলে জখলাৰ উচ্চতা বেৰৰ পৰা কিমান হাৰত নামিব নিৰ্ণয় কৰা আৰু জখলাৰ পাদটো বেৰৰ পৰা 4 মিটাৰ দূৰত আছে।

or/ অথবা

Show that $f(x)=\log(1+x)-\frac{2x}{2+x}$ $x>-1$ is an increasing function throughout its domain.

দেখুওৱা যে $f(x)=\log(1+x)-\frac{2x}{2+x}$ $x>-1$ ফলনটো ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰত বৰ্দ্ধমান।

9. Evaluate the following integrals. (তলৰ অনুকলণবোৰৰ মান উলিওৱা) 4

$$\int\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$$

or/ অথবা

$$\int x^2\log x\ dx$$

10. Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা।) $\int_0^a\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}dx$ 4

or / নাইবা

$$\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}dx$$

11. Solve the Differential equation. (অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰা।) 4

$e^x\tan y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$

12. Solve the differential equation. (অৱকল সমীকৰণটো সমাধান উলিওৱা।) 4

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

Or/ নাইবা

$$Cos^2x\frac{dy}{dx}+y=\tan x \qquad 0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

13. If $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, and $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ are such that $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ is perpendicular to $\vec{c}$ then find the value of λ. 4

যদি $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, আৰু $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}$ তিনিটা ভেক্টৰ হয় আৰু $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ য়ে $\vec{c}$ ওপৰত লম্ব তেন্তে λ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

14. Find the area of triangle with vartices A(1,1,2), B(2,3,5) and C(1,5,5). 4

A(1,1,2), B(2,3,5) আৰু C(1,5,5) শীৰ্ষবিন্দুযুক্ত ত্ৰিভুজৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

or/ নাইবা

Find the unit vector perpendicular to each of the vector $\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$ where

$\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ and $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$.

$\vec{a}+\vec{b}$ আৰু $\vec{a}-\vec{b}$ ভেক্টৰ দুটাৰ প্ৰত্যেকৰে লগত লম্ব হোৱা এটা একক ভেক্টৰ উলিওৱা। য'ত $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$

আৰু $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$

15. Find the area of the region bounded by the elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 4

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তই আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

or/ নাইবা

Find the area of the region bounded by the line y=3x+2, the X axis and ordinates x = –1 and x = 1.

সৰলৰেখা y=3x+2, X অক্ষ, x = –1 আৰু x = 1 আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

16. An Instructor has a question bank consisting of 300 easy true / false questions, 200 difficult true / False questions, 500 easy multiple choice questions and 400 difficult multiple choice qustions. If a question is selected at random from the question bank, what is the probability that it will be an easy question given that it is a multiple choice questions ? 4

এজন পৰীক্ষকৰ হাতত 300 টা সহজ সঁচা / মিছা 200 টা কঠিন সঁচা / মিছা ধৰণৰ, 500 টা সহজ বহু বিকল্পযুক্ত (multiple choice) আৰু 400 টা কঠিন বহু বিকল্প যুক্ত প্ৰশ্নৰ এখন প্ৰশ্নকোষ আছে। প্ৰশ্নকোষৰ পৰা এটা প্ৰশ্ন সাদৃচ্ছিকভাবে বাছনি কৰিলে প্ৰশ্নটো সহজ হোৱা সম্ভাৱিতা কিমান যদি ই এটা বহু বিকল্পযুক্ত প্ৰশ্ন বুলি ইতিমধ্যে জনা যায়।

or/

Probability of solving specific problem independently by A and B are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ respectively.

If both try to solve the problem independently, find the probability that

i) The problem is solved (ii) Exactly one of them solves the problem.

A আৰু B য়ে এটা বিশেষ সমস্যা স্বতন্ত্ৰভাৱে সমাধান কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ক্ৰমে $\frac{1}{2}$ আৰু $\frac{1}{3}$ যদি সমস্যাটো সমাধানৰ বাবে উভয়ে স্বতন্ত্ৰভাৱে চেষ্টা কৰে, তেন্তে সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যাতে

i) সমস্যাটোৰ সমাধান হয়।

ii) তেওঁলোকৰ ঠিক এজনে সমস্যাটোৰ সমাধান আগবঢ়ায়।

17. If $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 5\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$, Find A^{-1} using A^{-1} solve the system of equations 6

2x–3y+5z =11
3x +2y–4z =–5
x+y–2z = –3

P.T.O.

যদি $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা।

A^{-1} ব্যৱহাৰ কৰি -
$2x - 3y + 5z = 11$
$3x + 2y - 4z = -5$
$x + y - 2z = -3$ সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰা।

or/

If $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ show that $A^2-5A+7I=0$

Hence Find A^{-1}

যদি $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ দেখুওৱা যে $A^2-5A+7I=0$ লগতে A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা।

18. Find the maximum value of $2x^3-24x+107$ in the interval [1,3]. Find the maximum value of the same function in [-3, -1] 6
1,3] অন্তৰালত $2x^3-24x+107$ ফলনৰ উচ্চতম মান নিৰ্ণয় কৰা। [-3, -1] অন্তৰালত সেই একে ফলনৰ উচ্চতম মান নিৰ্ণয় কৰা।

19. Find the shortest distance between the lines whose vector equation are . 6
ৰেখা দুডালৰ মাজৰ নিম্নতম দূৰত্ব নিৰ্ণেয় কৰা-

$\vec{r}=(1-\lambda)\vec{i}\ \ (\lambda-2)\hat{j}+(3-2\lambda)\hat{k}$ and $\vec{r}=(\upsilon+1)\hat{i}+(2\upsilon-1)\hat{j}+(2\upsilon+I)\hat{k}$

or / নাইবা

Find the value of P. So that the lines

$\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$ and $\frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ are at right angles.

P ৰ মান উলিওৱা যাতে $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$ আৰু $\frac{7-7x}{3p}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ ৰেখা দুডালে এক সমকোণ উৎপন্ন কৰে।

20. Bag I contains 3 red and 4 black balls while another bag II contains 5 red and 6 black balls. One ball is drawn at random from one of the bags and it is found to be red. Find the probability that it was drawn from beg II. 6
মোনা I ত 3 টা ৰঙা আৰু 4 টা ক'লা বল আৰু আনহাতে মোনা II ত 5 টা ৰঙা আৰু 6 টা ক'লা বল আছে। যাদৃচ্ছিক ভাবে এখন মোনাৰ পৰা এটা বল লোৱা যাতে এই বলটো ৰঙা পোৱা গ'ল। বলটোয়ে মোনা II ৰ পৰা লোৱা হৈছিল তাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

or/ অথবা

A card from a pack of 52 cards is lost from the remaining cards of the pack, two cards are drawn and one found to be both diamonds. Find the probability of the lost card be a diamond.

তাচখেলৰ 52 খন তাচপাতৰ পৰা এপাত তাচ হেৰাল। পেকেটটোৰ অৱশিষ্ট তাচসমূহৰ পৰা দুখন তাচপাত টানি চোৱাত দুয়োখন ৰুহিতন [diamond] পোৱা গ'ল। হেৰুৱা তাচপাতটো ৰুহিতন হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা। 6

21. Solve the linear programming graphically.

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ ৰৈখিক প্ৰগেমিং সমস্যাটোৰ সমাধান কৰা।

Minimise and maximise $z=5x+10y$

Subject to

$x+2y\leq 120$

$x+y\geq 60$

$x-2y\geq 0$

$x\geq 0, y\geq 0$

$z=5x+10y$ ৰ সৰ্ব্বনিম্ন আৰু সৰ্ব্বোচ্চ মান উলিওৱা য'ত —

$x+2y\leq 120$

$x+y\geq 60$

$x-2y\geq 0$

$x\geq 0, y\geq 0$

or/নাইবা

Solve the following problem graphically.

(লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা।)

Minimize and maximize $z = 3x + 9y$

Subject to the constraints :

$x+3y\leq 60$

$x+y\geq 10$

$x\leq y$

$x\geq 0, y\geq 0$

$z = 3x + 9y$ ৰ সৰ্ব্বনিম্ন আৰু সৰ্ব্বোচ্চ মান উলিওৱা।

য'ত $x+3y\leq 60$

$x+y\geq 10$

$x\leq y$

$x\geq 0, y\geq 0$

======xxxx======