D.K.D. COLLEGE, DERGAON

H.S. 2nd year Pre Final Examination – 2023

SUBJECT : MATHEMATICS

Time : 3 hrs. Total Marks : 100

(The figures in the margin indicate full marks for the questions)

1. Answer the following questions. 1x10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা।

a) Let $A = \{x : 1<x<11,\ x \text{ is a prime number}\}$ and $B = \{y : 10<y<20,\ y \text{ is an odd number}\}$.

Write the number of relations from A to B.

ধৰাহ'ল $A = \{x : 1<x<11,$ x এটা মৌলিক সংখ্যা $\}$ আৰু $B = \{y : 10<y<20,$ y এটা অযুগ্ম সংখ্যা$\}$। A ৰ পৰা B লৈ হোৱা সম্বন্ধৰ সংখ্যা লিখা।

b) Write the principal value of (মুখ্য মান লিখা)

$$\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{-16\pi}{15}\right)\right]$$

c) Let A be a 3x3 determinant and $|A|=7$. Find the value of $|2A|$.

যদি A এটা 3x3 নিৰ্ণায়ক আৰু $|A|=7$, তেন্তে $|2A|$ ৰ মান লিখা।

d) Find $adj\ A$ when $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

$adj\ A$ উলিওৱা, যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

e) If $a^x = b^y$, then find $\frac{dy}{dx}$

যদি $a^x = b^y$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা।

f) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) $\int 2xf'(x^2)dx$

g) Find the order and degree of the differential equation.
অবকল সমীকৰণৰ মাত্ৰা আৰু ঘাত নিৰ্ণয় কৰা।

$$\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x$$

h) If $\hat{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ and $\hat{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$ are such that $\vec{a}\perp\vec{b}$, what is the value of λ ?
যদি $\hat{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ আৰু $\hat{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$ ভেক্টৰ দুটা এনেকুৱা যাতে $\vec{a}\perp\vec{b}$, তেন্তে λ ৰ মান কিমান?

i) Write the direction cosines of the vector $\hat{j}$.
$\hat{j}$ ভেক্টৰৰ দিশাংকবোৰ লিখা।

j) What is the vector equation of the line passing through the points (-1, 0, 2) and (3, 4, 6)?
(-1, 0, 2) আৰু (3, 4, 6) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাডাল ভেক্টৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

2. A relation R in the set $A=\{x\in z:0\le x\le 12\}$ is given by $R=\{(a,b):|a-b|$ *is a multiple of 4*$\}$. Prove that R is an equivalence relation. Find the set of all elements related to 1. 4
দেখুওৱা যে $A=\{x\in z:0\le x\le 12\}$ সংহতিত সংজ্ঞাবদ্ধ সম্বন্ধ $R=\{(a,b):|a-b|$ *4* ৰ গুণিতক$\}$ সমতুল্য সম্বন্ধ। 1 ৰ লগত যুক্ত মৌলবোৰৰ সংহতি উলিওৱা।

Or/অথবা

Let R be the set of all real numbers. Show that the function $f:R\to R$ defined by $f(x)=\frac{3x+1}{2}$ for all $x\in R$ is bijective. Also find the inverse of f.
ধৰাহ'ল, R এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। দেখুৱা যে $f:R\to R$, য'ত $f(x)=\frac{3x+1}{2}$, $x\in R$, সংজ্ঞাবদ্ধ ফলনটো দ্বি-নিক্ষেপক ফলন। f ফলনৰ বিপৰীত ফলনও নিৰ্ণয় কৰা।

3. If (যদি) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\frac{\pi}{2}$, 4
Prove that (প্ৰমাণ কৰা) $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$

Or/অথবা

If (যদি) $\tan-1\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}\right)=\theta$

Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) $x^2=\sin 2\theta$

4. Without expanding, show that (বিস্তাৰ নকৰাকৈ প্ৰমাণ কৰা যে) 4

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^3 & y^3 & z^3\end{vmatrix}=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

Or/অথবা

If (যদি) $\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$,

then prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) $A^n=\begin{bmatrix}1+2n & -4n\\ n & 1-2n\end{bmatrix}$,

where (য'ত) $n\in N$

5. Find $\frac{dy}{dx}$ ($\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা) 4

$x^y y^x=1$

তেনেহ'লে বলটো A মেনাৰ পৰা লোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

13. Using matrix method solve the following system of linear equations.

মৌলকক্ষীয় পদ্ধতিৰে তলৰ বৈখিক সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ সমাধান উলিওৱা। 6

$$x-y+z=4$$
$$2x+y-3z=0$$
$$x+y+z=2$$

Or/অথবা

If $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, find A^{-1}. Using A^{-1} solve the system of equations.

যদি $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, তেন্তে A^{-1} উলিওৱা। A^{-1}ৰ মান ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ সহসমীকৰণবোৰ সমাধান কৰা।

$$2x-3y+5z=11$$
$$3x+2y-4z=-5$$
$$x+y+2z=-3$$

14. Find the interval in which the function f given by $f(x)=2x^3-3x^2-36x+7$ is

(a) strictly increasing,

(b) strictly decreasing.

$f(x)=2x^3-3x^2-36x+7$ ফলনটো কি অন্তৰালত

(a) যথাৰ্থ বৰ্দ্ধমান হ'ব

(b) যথাৰ্থ হ্ৰাসমান হ'ব নিৰ্ণয় কৰা।

15. Evaluate $\int_1^4 \frac{2x+1}{5}\,dx$ as the limit of a sum. 6

$\int_1^4 \frac{2x+1}{5}\,dx$ ক এটা যোগফলৰ সীমা হিচাপে প্ৰকাশ কৰি মান উলিওৱা।

16. Find the area of the smaller part of the region bounded by $x^2+y^2=25$ and $x+y=5$ by the method of integration. 6

অনুকলন পদ্ধতিৰে $x^2+y^2=25$ আৰু $x+y=5$ ৰে আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ সৰু অংশটোৰ কালি উলিওৱা।

17. Answer any two. 3x2=6

যিকোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা।

a) Find the direction cosines of a line which makes equal angles with the coordinate axes.

স্থানাংক অক্ষৰ লগত সমান কোণ কৰা ৰেখাডালৰ দিশাংক নিৰ্ণয় কৰা।

b) Find the equation of the line through the point (-1, 2, 3) which is perpendicular to the lines $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ and $\frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$

(-1, 2, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ আৰু $\frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$ ৰেখা দুডালৰ লম্বভাৱে থকা ৰেখাৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

c) Find the point on the line $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{2}$ at a distance $3\sqrt{2}$ from the point (1, 2, 3)

$\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{2}$ ৰেখাৰ ওপৰত থকা আৰু (1, 2, 3) বিন্দুটোৰ

Or/অথবা

Find $\frac{dy}{dx}$ ($\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা) if (যদি) $xy = \sin(x+y)$

6. If (যদি) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, find (নিৰ্ণয় কৰা) $\frac{d^2y}{dx^2}$ 4

Or/অথবা

If (যদি) $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

7. Evaluate the following integrals (any two). 2x4=8
তলৰ অনুকলবোৰৰ মান উলিওৱা (যিকোনো দুটাৰ)

i) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}dx$

ii) $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+2)}$

iii) $\int x(\log x)^2 dx$

8. Solve the differential equation. 4
(অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান উলিওৱা)

$$\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$$

9. Find the equation of the curve passing through the point (0,2) and the slope of the tangent at any point on the curve is equal to the sum of the co-ordinates of that point. 4
(0,2) বিন্দুৰ মাজেদি যোৱা বক্ৰডালৰ সমীকৰণ উলিওৱা যদিহে বক্ৰডালৰ যিকোনো বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ প্ৰৱনতা বিন্দুটোৰ স্থানাংক দুটাৰ যোগফলৰ সমান হয়।

10. The volume of a cube is increasing at the rate of $8cm^3/sec$

How fast is the surface area increasing when the length of an edge is 12cm? 4
এটা ঘনকৰ আয়তনৰ বৃদ্ধিৰ হাৰ $8cm^3/sec$ ঘনকটোৰ এটা কাষৰ দৈৰ্ঘ্য 12cm হওতে পৃষ্ঠকালিৰ বৃদ্ধিৰ হাৰ কিমান হ'ব?

11. Find the shortest distance between the lines. 4
তলৰ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ নিম্নতম দূৰত্ব উলিওৱা।

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and (আৰু)

$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

Or/অথবা

Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a}+\vec{b}$ and $\vec{a}-\vec{b}$, where $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$
$\vec{a}+\vec{b}$ আৰু $\vec{a}-\vec{b}$ ভেক্টৰৰ লম্ব হোৱাকৈ এটা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা যত $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ আৰু $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

12. A die is thrown twice and the sum of the numbers appearing is observed to be 6. What is the conditional probability that the number 4 has appeared at least once? 4
এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল আৰু দুয়োবাৰতে পোৱা সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 6 পোৱা গ'ল। অতি কমেও এবাৰ 4 সংখ্যাটো পোৱাৰ চৰ্ত সাপেক্ষ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

Or/অথবা

Bag A contains 2 red and 4 black balls and Bag B contains 3 red and 3 black balls. One of the two bags is selected at random and a ball is drawn from a bag which is found to be red. Find the probability that the ball is drawn from the bag A.
A মোনাত 2 টা ৰঙা আৰু 4 টা ক'লা বল আছে, B মোনাত 3 টা ৰঙা আৰু 3 টা ক'লা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা মোনা লোৱা হ'ল আৰু তাৰ পৰা এটা বল লোৱা হ'ল। যদি নিৰ্বাচিত বলটো ৰঙা হয়,

পৰা $3\sqrt{2}$ দূৰত্বত থকা বিন্দুটো নিৰ্ণয় কৰা।

18. The two adjacent sides of a parallelogram are $(2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k})$ and $(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k})$ Find the unit vector parallel to its diagonal. Also find the area of the parallelogram.

এটা সামান্তৰিকৰ দুটা সন্নিহিত বাহু হ'ল $(2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k})$ আৰু $(\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k})$। ইয়াৰ কৰ্ণৰ সমান্তৰাল একক ভেক্টৰ উলিওৱা। সামান্তৰিকটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

Or/অথবা

For any two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, prove that

যিকোনো দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

$$|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

19. Solve the LPP graphically :

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ LPP টোৰ সমাধান উলিওৱা।

Maximize and minimize (সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা)

$$z = 6x + 3y$$

Subject to $4x + y \ge 80$

$x + 5y \ge 115$ 6

$3x + 2y \le 150$

$x \ge 0, y \ge 0$

$4x = 40$
$\Rightarrow x = 10$

::::::

$4x = 20$
$\Rightarrow x = 5$