

PRE FINAL EXAMINATION, 2023-24
SUBJECT : MATHEMATICS
CLASS: XII

Time : 3 hours

Full Marks : 100

(The figures in the margin indicate full marks for the questions)

SECTION - A

1. Answer the following questions : 1x10=10

(তলৰ প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া)

(i) Write the range of the function \cos^{-1}

(\cos^{-1} ফলনটোৰ পৰিসৰ লিখা)

(ii) If A is a matrix of order 1×4 and B is a matrix of order 4×1 , what is the order of the matrix $(AB)^T$.

(যদি মৌলকক্ষ A ৰ মাত্ৰা 1×4 আৰু মৌলকক্ষ B ৰ মাত্ৰা 4×1 হয়, তেন্তে মৌলকক্ষ $(AB)^T$ ৰ মাত্ৰা কিমান?)

(iii) If the matrix A is both symmetric and skew symmetric, then

(a) A is a diagonal matrix (b) A is a zero matrix

(c) A is a square matrix (d) None of these

(A মৌলকক্ষটো যদি সমমিত আৰু বিঘম সমমিত, দুয়োটা হয় তেনেহ'লে

(a) A এটা বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ (b) A এটা শূন্য মৌলকক্ষ

(c) A এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ (d) এইকেইটাৰ এটাও নহয়

(iv) The total number of elements in a matrix represents a prime number. How many possible orders a matrix can have?

(এটা মৌলকক্ষৰ মুঠ মৌল সংখ্যাই এটা মৌলিক সংখ্যাক বুজায়। এনে মৌলকক্ষৰ সম্ভৱপৰ মাত্ৰা কিমান হ'ব?)

(v) If $\frac{d}{dx} \{f(x)\} = f'(x)$, then $\int e^x [f(x) + f'(x)] dx = ?$

(যদি $\frac{d}{dx} \{f(x)\} = f'(x)$, তেন্তে $\int e^x [f(x) + f'(x)] dx = ?$)

(vi) Find the order and the degree of the differential equation (অৱকলজ সমীকৰণটোৰ ক্ৰম আৰু ঘাত লিখা)

$$xy \frac{d^3y}{dx^3} + x \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

(vii) What is the direction cosine of Z- axis?

(Z- অক্ষৰ দিশাংক কিমান?)

(viii) If $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$ are such that $\vec{a} \perp \vec{b}$, what is the value of λ ?

(যদি $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ আৰু $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \lambda\hat{k}$ যাতে

$\vec{a} \perp \vec{b}$, তেন্তে λ ৰ মান কিমান?)

(ix) If (যদি) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$, then (তেন্তে)

$P(A|B) = ?$

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) Not defined (সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়) (d) 1

(x) If A and B are two independent events such that $P(A) = 0.3$ and $P(B) = 0.4$ then find $P(A \cup B)$

(যদি A আৰু B দুটা স্বতন্ত্ৰ ঘটনা যাতে $P(A) = 0.3$ আৰু

$P(B) = 0.4$ তেন্তে $P(A \cup B)$ নিৰ্ণয় কৰা।)

SECTION - B

2. If R_1 and R_2 are two equivalence relations on a set A, then show that $R_1 \cap R_2$ is also an equivalence relation on A. 4

(যদি A ত R_1 আৰু R_2 দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে, A ত $R_1 \cap R_2$ ও এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ হ'ব)

Or/ অথবা

Show that $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ given by $f(x) = \frac{x}{x+2}$ is one-one.
Find the inverse of the function $f: [-1, 1] \rightarrow \text{Range } f$.

$$2+2=4$$

(দেখুওৱা যে $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ফলনটো একৈকী।
ফলন $f: [-1, 1] \rightarrow$ পৰিসৰ f ৰ বিপৰীত ফলন নিৰ্ণয় কৰা।)

3. If $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ and $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ are defined by $f(x) = 2x$,
 $g(y) = 3y + 4$ and $h(z) = \sin z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, then show
that $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. 4

(যদি $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ আৰু $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ এনেদৰে সংজ্ঞাবদ্ধ যে
 $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$ আৰু $h(z) = \sin z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$,
তেন্তে দেখুওৱা যে $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.)

Or/ অথবা

Let $A = \mathbb{R} - \{3\}$ and $B = \mathbb{R} - \{1\}$. Consider the function
 $f: A \rightarrow B$ defined by $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. Is f one-one and onto?

Justify your answer. 2+2=4

(ধৰা হ'ল $A = \mathbb{R} - \{3\}$ আৰু $B = \mathbb{R} - \{1\}$ । $f: A \rightarrow B$, $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

ফলনটো লোৱা হ'ল। ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়নে? তোমাৰ
উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্ৰতিপন্ন কৰা।)

4. Prove that : $\tan^{-1} \frac{63}{16} = \sin^{-1} \frac{5}{13} + \cos^{-1} \frac{3}{5}$ 4
প্ৰমাণ কৰা যে : $\tan^{-1} \frac{63}{16} = \sin^{-1} \frac{5}{13} + \cos^{-1} \frac{3}{5}$

Or/ অথবা

Show that : (দেখুওৱা যে) 4

$$\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right) + \frac{1}{2} \cos^{-1} x = \frac{\pi}{4}$$

5. Discuss the continuity of the function

4

(ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কৰা।)

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{if (যদি) } x \leq -1 \\ 2x, & \text{if (যদি) } -1 < x \leq 1 \\ 2, & \text{if (যদি) } x > 1 \end{cases}$$

Or/ অথবা

If (যদি) $y = 3 \cos (\log x) + 4 \sin (\log x)$, show that
(দেখুওৱা যে) $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$

6. Show that (দেখুওৱা যে) :

4

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

Or/ অথবা

If $f(x)$ and $g(x)$ are defined as $f(x) = f(a-x)$ and
 $g(x) + g(a-x) = 4$. Then show that

$$\int_0^a f(x)g(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

(যদি $f(x)$ আৰু $g(x)$ ৰ সংজ্ঞা $f(x) = f(a-x)$ আৰু $g(x) + g(a-x) = 4$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $\int_0^a f(x)g(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$)

7. Integrate (অনুকল কৰা) :

2+2=4

(i) $\int \cot x \log(\sin x) dx$

(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx$

Or/ অথবা

Integrate (অনুকল কৰা) :

4

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)} dx$$

8. Sand is pouring from a pipe at the rate of $12 \text{ cm}^3/\text{s}$. The falling sand forms a cone on the ground in such a way that the height of the cone is always one-sixth of the radius of the base. How fast is the height of the sand cone increasing when the height is 4 cm? 4

(এডাল পাইপৰ পৰা $12 \text{ ছে.মি.}^3/\text{ছেকেণ্ড}$ হাৰে বালি পৰি আছে। পৰা বালিবোৰে মাটিত এটা শংকুৰ সৃষ্টি কৰে আৰু শংকুটোৰ উচ্চতা সদায় ভূমিৰ ব্যাসাৰ্ধৰ এক-ষষ্ঠাংশ। কি হাৰত বালিৰ শংকুটোৰ উচ্চতা বাঢ়ে উলিওৱা যেতিয়া উচ্চতা 4 ছে.মি. হয়।)

Or/ অথবা

Find the intervals in which the function given by $f(x)=2x^3-3x^2-36x+7$ is (a) increasing (b) decreasing. (f(x)= $2x^3-3x^2-36x+7$ ফলনটো কোন অন্তৰালত (a) বৰ্ধমান (b) হ্রাসমান নিৰ্ণয় কৰা।)

9. Find the area bounded by the curve $x^2=4y$ and the line $x=4y-2$ 4

($x^2=4y$ বক্ৰ আৰু $x=4y-2$ সৰলৰেখাডালে আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।)

Or/ অথবা

The area between $x=y^2$ and $x=4$ is divided into two equal parts by the line $x=a$, find the value of a.

($x=y^2$ বক্ৰ আৰু $x=4$ সৰলৰেখাডালে আগুৰা ক্ষেত্ৰক যদিহে $x=a$ সৰলৰেখাডালে দুটা সমান অংশত বিভক্ত কৰে, তেন্তে a ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।)

10. Solve general Solution : (সাধাৰণ সমাধান উলিওৱা) 4

$$\sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy = 0$$

Or/ অথবা

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

11. If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are three unit vectors and $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$
 Find $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ 4
 (যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ তিনিটা একক ভেক্টর আৰু $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ তেন্তে
 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ উলিওৱা)

Or/ অথবা

If (যদি) $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = 0$
 Find λ and μ (তেন্তে λ আৰু μ নিৰ্ণয় কৰা।)

12. Find the shortest distance between the lines 4
 (ৰেখা দুডালৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিওৱা)

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu (2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

Or/ অথবা

Find the values of 'p' so that the lines

$$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2} \quad \text{and} \quad \frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{2}$$

are at right angles.

$$\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2} \quad \text{আৰু} \quad \frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{2}$$

ৰেখা দুডালে সমকোণ কৰিলে 'p' ৰ মান উলিওৱা।

13. Find the equation of the line in vector and in cartesian form that passes through the point with position vector $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ and is in the direction $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$. 4
 ($2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ স্থিতি ভেক্টৰযুক্ত বিন্দুৰ মাজেৰে আৰু $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টৰৰ দিশত এডাল ৰেখাৰ ভেক্টৰ আৰু কাৰ্টেজীয় সমীকৰণ উলিওৱা।)

SECTION - C

14. Solve using matrix method. 6

(মৌলিকক্ষীয় পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰা)

$$2x + 3y + 3z = 5$$

$$x - 2y + z = -4$$

$$3x - y - 2z = 3$$

15. Find $\frac{dy}{dx}$ if ($\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা যদি) 3+3=6

(i) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

(ii) $x^y + y^x = 1$

Or/ অথবা

Find $\frac{dy}{dx}$ if ($\frac{dy}{dx}$ উলিওৱা যদি)

(i) $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \quad y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

(ii) $y = \tan^{-1} \frac{3x-x^3}{1-3x^2}, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

16. Integrate (অনুকল উলিওৱা) 3+3=6

(i) $\int_0^1 x(1-x)^n dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} (2 \sec^2 x + x^3 + 2) dx$

Or/ অথবা

Integrate (অনুকল উলিওৱা)

(i) $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$

(ii) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx$

17. Find the equation of a curve passing through the point (0,-2) given that at any point (x,y) on the curve, the product of the slope of its tangent and 'y' co-ordinate of the point is equal to the 'x' co-ordinate of the point. 6

((0,-2) বিন্দুৰে যোৱা এডাল বক্ৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা যদি দিয়া থাকে যে বক্ৰডালৰ যিকোনো বিন্দু (x,y) ত স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা আৰু বিন্দুটোৰ 'y' স্থানাংকৰ গুণফল বিন্দুটোৰ 'x' স্থানাংকৰ সমান।)

Or/ অথবা

Find the particular solution of the differential equation

$$(1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}, y = 0 \text{ when } x = 1.$$

$$((1+x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}; y = 0 \text{ যেতিয়া } x = 1$$

অৱকল সমীকৰণটোৰ বিশেষ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা।)

18. Write the triangle inequality for any two vectors

\vec{a} and \vec{b} and prove it.

2+4=6

(যিকোনো দুটা ভেক্টৰ \vec{a} আৰু \vec{b} ৰ ক্ষেত্ৰত ত্ৰিভুজ অসমিকটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।)

Or/ অথবা

Show that the points A $(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$, B $(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ and C $(7\hat{i}-\hat{k})$ are collinear.

(দেখুওৱা যে A $(-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$, B $(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ আৰু C $(7\hat{i}-\hat{k})$ বিন্দুবোৰ একৰেখীয়।)

19. Solve the following linear programming problem graphically : Minimise $Z = -3x + 4y$ 6

$$\text{Subject to } x + 2y \leq 8$$

$$3x + 2y \leq 12$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

(তলৰ ৰৈখিক প্ৰোগ্ৰামিং সমস্যাবোৰৰ লৈখিকভাৱে সমাধান উলিওৱা :

$$x + 2y \leq 8$$

$$3x + 2y \leq 12$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0 \text{ সাপেক্ষে } Z = -3x + 4y \text{ ৰ সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা।)$$

20. Probability distribution of a random variable x is given below. (এটা যাদুচ্ছিক চলক x ৰ সম্ভাৱিতা বন্টন এনেধৰণৰ)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
P(x)	0	k	2k	2k	3k	k ²	2k ²	7k ² +k

Find (মান নির্ণয় কৰা) :

$$2+2+2=6$$

- (i) k (ii) P (k < 3) (iii) P (0 < x < 3)

Or/ অথবা

An insurance company insured 2000 scooter drivers, 4000 car drivers and 6000 truck drivers. The probability of an accident are 0.01, 0.03 and 0.15 respectively. One of the insured persons meet with an accident. What is the probability that he is a scooter driver.

6

(এক বীমা কোম্পানীয়ে 2000 জন স্কুটাৰ চালক, 4000 জন কাৰ চালক আৰু 6000 জন ট্ৰাক চালকৰ বাবে বীমা কৰোৱায়। এওঁলোকৰ ক্ষেত্ৰত দুৰ্ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ হ'ল যথাক্ৰমে 0.01, 0.03 আৰু 0.15। বীমাকৃত চালকসকলৰ এজন দুৰ্ঘটনাপ্ৰাপ্ত হ'ল, তেওঁ এজন স্কুটাৰ চালক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?)
