

Pre-final Examination: 2023

H.S. Final Year

Sub: Mathematics

Time: 3Hrs

Full Marks: 100

1. Answer the following questions:

1 × 10 = 10

(a) Give example of a row matrix which is also a column matrix.

এটা শাৰী মৌলকক্ষৰ উদাহৰণ দিয়া যিটো স্তম্ভ মৌলকক্ষও হয়।

(b) Prove that the diagonal elements of a skew symmetric matrix are always zero.

প্রমাণ কৰা যে এটা বিঘম-সমমিত মৌলকক্ষৰ বিকর্ণ মৌলবোৰ সদায় শূণ্য।

(c) Let R be a relation defined on Z as $R = \{(a,b) ; a^2 + b^2 = 25\}$, find the domain of R .

Z ৰ ওপৰত $R = \{(a,b) ; a^2 + b^2 = 25\}$ এটা সম্পর্ক সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হ'ল। R ৰ আদিক্ষেত্র উলিওৱা।

(d) Differentiate $\sin x$ w.r.t $\cos x$.

$\cos x$ ৰ সাপেক্ষে $\sin x$ ৰ অৱকলজ উলিওৱা।

(e) Write down the value of $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \tan^5 x \, dx$

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \tan^5 x \, dx$ ৰ মান লিখা।

(f) Find the order of the differential equation $\frac{d^4 y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$.

$\frac{d^4 y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$ অৱকল সমীকৰণটোৰ ক্ৰম নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Write the domain and range of the function $\sin^{-1} x$.

$\sin^{-1} x$ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্র আৰু পৰিসৰ উল্লেখ কৰা।

(h) Find the distance of the point $(1, -5, 5)$ from the Z axis.

$(1, -5, 5)$ বিন্দুটোৰ Z অক্ষৰ পৰা দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

(i) Find the direction cosines of X axis.

X অক্ষৰ দিশাংক সমূহ লিখা।

(j) Is the function $f: R \rightarrow R$ defined by $f(x) = x^2$ is onto?

$f: R \rightarrow R, f(x) = x^2$ ফলনটো আছাদক হয়নে?

2. Check whether the relation R in the set of real numbers given by $R = \{(a, b): 1 + ab > 0\}$ is reflexive, symmetric or transitive. 4

বাস্তব সংখ্যার সংহতির ওপৰত R সম্পর্কটো $R = \{(a, b): 1 + ab > 0\}$ ধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হ'ল। সম্পর্কটো স্বত্বল্য, সমমিত আৰু সংক্রামক হয়নে পৰীক্ষা কৰা।

Or

Define an equivalence relation. Prove that the intersection of two equivalence relations in a set is again equivalence in the same set. 1 + 3 = 4

সমতুল্য সম্পর্কৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে এটা সংহতিৰ ওপৰত সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা দুটা সমতুল্য সম্পর্কৰ ছেদন একেটা সংহতিৰ ওপৰত আকৌ সমতুল্য সম্পর্ক হয়।

3. If $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, then find the value of x . 4

যদি $\tan^{-1} \frac{x-1}{x-2} + \tan^{-1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, তেন্তে x ৰ মান নির্ণয় কৰা।

Or

Prove that $\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{8}{17} = \cos^{-1} \frac{84}{85}$ 4

প্রমাণ কৰা যে $\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{8}{17} = \cos^{-1} \frac{84}{85}$

4. Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ satisfies the equation $A^2 - 4A + I = O$, where I is 2×2 identity matrix and O is 2×2 zero matrix. Using this equation, find A^{-1} . 4

দেখুওৱা যে $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটোৱে $A^2 - 4A + I = O$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে, য'ত I হ'ল 2×2 একক মৌলকক্ষ আৰু O হ'ল 2×2 শূন্য মৌলকক্ষ। সমীকৰণটো ব্যৱহাৰ কৰি A^{-1} নির্ণয় কৰা।

Or

Express the matrix $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric and skew symmetric matrix. 4

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটোক এটা সমমিত আৰু এটা বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ সমষ্টি হিচাপে প্রকাশ কৰা।

5. Find the values of a and b such that the function defined by $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{if } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{if } 2 < x < 10 \\ 21, & \text{if } x \geq 10 \end{cases}$ is a continuous function. 4

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{if } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{if } 2 < x < 10 \\ 21, & \text{if } x \geq 10 \end{cases}$$

এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন হ'লে a আৰু b ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

6. Find $\frac{dy}{dx}$ if - 2 + 2 = 4

$\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা যদি -

(i) $y = x^x$

(ii) $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

7. If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$, prove that $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ 4

যদি $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$, প্রমাণ কৰা যে $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

Or

If $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$, for some $c > 0$, prove that $\frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ is a constant independent of ' a ' and ' b '. 4

যদি কোনো $c > 0$ ৰ বাবে $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$, প্রমাণ কৰা যে $\frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ এটা ধ্রুবক, যিটো a আৰু b ৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ নকৰে।

8. Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা): $\int \frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}} dx$ 4

Or

Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা): 2 + 2 = 4

(i) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(ii) $\int x \log x dx$

9. Find the local maxima and local minima, if any of the function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ 2 + 2 = 4
 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ ফলনটোৰ স্থানীয় গৰিষ্ঠ আৰু স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰা, যদি আছে।

Or

Prove that the function $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$ is an increasing function of x throughout its domain. 4

প্রমাণ কৰা যে $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > -1$ ফলনটো ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰত x ৰ এটা বৰ্ধমান ফলন।

10. A particle moves along the curve $6y = x^3 + 2$. Find the point(s) on the curve at which the y -coordinate is changing 8 times as fast as the x -coordinate. 4

এটা কণিকা $6y = x^3 + 2$ বক্রৰে চলাচল কৰে। বক্রটোৰ সেই বিন্দু(বোৰ) উলিওৱা য'ত x স্থানাংকতকৈ 8 গুণ বেছি বেগত y স্থানাংক পৰিৱৰ্তিত হয়।

Or

Find intervals in which the function given by $f(x) = \sin 3x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ is

(a) increasing

(b) decreasing

2 + 2 = 4

$f(x) = \sin 3x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ফলনটো কোন কেইটা অন্তৰালত (a) বৰ্ধমান আৰু (b) হ্রাসমান নিৰ্ণয় কৰা।

11. Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা): $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$ Or $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx$ 4

12. Find the cross product of the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ 4

$\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ আৰু $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টৰ দুটাৰ ভেক্টৰ পূৰণফল নিৰ্ণয় কৰা।

Or

The scalar product of the vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ with the vector $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ is equal to 1. Find the value of λ . 4

$\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ আৰু $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টৰ দুটাৰ স্কেলাৰ পূৰণফল 1 হ'লে λ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

13. A man is known to speak truth 3 out of 4 times. He throws a die and reports that it is a six. Find the probability that it is actually a six. 4

এজন মানুহে 4 বাৰৰ ভিতৰত 3 বাৰ সঁচা কয় বুলি জনা যায়। তেওঁ পাশতি এটা টচ কৰে আৰু ছয় পোৱা বুলি ব্যক্ত কৰে। পাশতিটোত সঁচাকৈয়ে ছয় পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

Or

There are three coins. One is a two headed coin (having head on both faces), another is a biased coin that comes up heads 75% of the time and third is an unbiased coin. One of the three coins is chosen at random and tossed, it shows heads, what is the probability that it was the two headed coin? 4

তিনিটা মুদ্ৰাৰ এটা দ্বিমুণ্ড বিশিষ্ট (দুয়ো পিঠিত মুণ্ড থকা), দ্বিতীয়টো বিষম গাঠনি যুক্ত যাৰ টছ কৰিলে কাৰ্যত 75% মুণ্ড গ্ৰাস্ত হয় আৰু তৃতীয়টো নিখুঁত গাঠনি যুক্ত। যাদুচ্ছিক ভাৱে মুদ্ৰা তিনিটাৰ এটা নিৰ্বাচন কৰি টছ কৰাত মুণ্ড পোৱা গ'ল। মুদ্ৰাটো দ্বিমুণ্ড বিশিষ্ট হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

14. If x, y, z are unequal and $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$, then prove that $1 + xyz = 0$. 6

যদি x, y, z অসমান আব্দ $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$, তেত্তে প্রমাণ কৰা যে $1 + xyz = 0$

Or

The sum of three numbers is 6. If we multiply third number by 3 and add second number to it, we get 11. By adding first and third numbers, we get double of the second number. Represent it algebraically and find the numbers using matrix method. 6

তিনিটা সংখ্যাৰ সমষ্টি 6। যদি তৃতীয় সংখ্যাটোক 3 ৰে পূৰণ কৰা হয় আৰু দ্বিতীয় সংখ্যাটো ইয়াৰ লগত যোগ কৰা হয়, তেত্তে 11 পোৱা যায়।
প্রথম আৰু তৃতীয় সংখ্যা দুটা যোগ কৰি দ্বিতীয় সংখ্যাটোৰ দুগুন পোৱা যায়। ইয়াৰ বীজ গণিতীয় ভাবে প্রকাশ কৰা আব্দ নির্ণায়ক পদ্ধতি ব্যৱহাৰ
কৰি সংখ্যা কেইটা নির্ণয় কৰা।

15. Show that the differential equation $2y e^{\frac{x}{y}} dx + (y - 2x e^{\frac{x}{y}}) dy = 0$ is homogeneous. Also find the particular solution, given that, $x = 0$ when $y = 1$. 1 + 5 = 6

দেখুওৱা যে $2y e^{\frac{x}{y}} dx + (y - 2x e^{\frac{x}{y}}) dy = 0$ অৱকল সমীকৰণটো সমমাত্ৰিক। লগতে ইয়াৰ বিশেষ সমাধান নির্ণয় কৰা যদি $x = 0$ হ'লে
 $y = 1$ হয়।

Or

Find the equation of a curve passing through the point $(0, -2)$ given that at any point (x, y) on the curve, the product of the slope of its tangent and y coordinate of the point is equal to the x coordinate of the point. 6

$(0, -2)$ বিন্দুৰে যোৱা এডাল বক্ৰৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰা যদি দিয়া থাকে যে বক্ৰডালৰ যিকোনো বিন্দু (x, y) ত স্পর্শকৰ প্ৰৱণতা আৰু বিন্দুটোৰ
 y স্থানংকৰ গুণফল বিন্দুটোৰ x স্থানংকৰ সমান।

16. Using integration, find the area of region bounded by the circle $x^2 + y^2 = r^2$. 6

অনুকলন ব্যৱহাৰ কৰি $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তটোৰ কালি উলিওৱা।

Or

Find the area bounded by the curve $y^2 = 4x$, y -axis and the line $y = 3$. 6

$y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত, y অক্ষ আৰু $y = 3$ সৰল ৰেখাডালে আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি নির্ণয় কৰা।

17. Using vectors, prove that angle in a semicircle is a right angle. 6

ভেক্টৰ ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে অৰ্ধবৃত্তৰ কোণ এক সমকোণৰ সমান।

Or

For any vectors \vec{a} and \vec{b} , prove that $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

6

যিকোনো ভেক্টৰ \vec{a} আৰু \vec{b} ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

18. Find the shortest distance between the lines whose vector equations are $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + k(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ and $\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + s(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$.

6

দুডাল ৰেখাৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + k(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ আৰু $\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + s(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$ হ'লে সিহঁতৰ মাজৰ ন্যূনতম দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

Or

Find the values of p so that the lines $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ are at right angles.

6

যদি $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ আৰু $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ ৰেখা দুডাল সমকোণত থাকে, তেন্তে p ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

19. Solve the following linear programming problem graphically:

Minimise $Z = 200x + 500y$ subject to the constraints:

6

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

নিম্নোক্ত বৈখিক প্ৰোগ্ৰামিং সমস্যাটোৰ লৈখিক সমাধান কৰা -

$Z = 200x + 500y$ ৰ সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা য'ত সীমাবদ্ধতা বোৰ হ'ল

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Or

Solve the following linear programming problem graphically:

6

Maximise $Z = 4x + y$ subject to the constraints:

$$x + y \leq 50$$

$$3x + y \leq 90$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

নিম্নোক্ত বৈখিক প্ৰোগ্ৰামিং সমস্যাটোৰ লৈখিক সমাধান কৰা -

$Z = 4x + y$ ৰ সৰ্বোচ্চ মান উলিওৱা য'ত সীমাবদ্ধতা বোৰ হ'ল

$$x + y \leq 50$$

$$3x + y \leq 90$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

20. Probability of solving specific problem independently by A and B are $1/2$ and $1/3$ respectively. If both try to solve the problem independently, find the probability that

(i) the problem is solved

(ii) exactly one of them solves the problem.

$$3 + 3 = 6$$

A আৰু B ৰে এটা বিশেষ সমস্যা স্বতন্ত্র ভাৱে সমাধান কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ক্ৰমে $1/2$ আৰু $1/3$ | যদি সমস্যটোৰ সমাধানৰ বাবে উভয়ে স্বতন্ত্র ভাৱে চেষ্টা কৰে, তেন্তে সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা যাতে

(i) সমস্যটোৰ সমাধান হয়

(ii) তেওঁলোকৰ ঠিক এজনে সমস্যটোৰ সমাধান আগবঢ়ায়।

Or

(Answer both a and b)

(a) Events A and B are such that $P(A) = 1/2$, $P(B) = 7/12$ and $P(\text{not } A \text{ or not } B) = 1/4$. State whether A and B are independent? 3

A আৰু B ঘটনা দুটা এনেকুৱা যে $P(A) = 1/2$, $P(B) = 7/12$ আৰু $P(A \text{ নহয় বা } B \text{ নহয়}) = 1/4$ | A আৰু B স্বতন্ত্র হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

(b) Two cards are drawn at random and without replacement from a pack of 52 playing cards. Find the probability that both the cards are black. 3

52 পতীয়া তাম্বলৰ থাক এটিৰ পৰা পুনৰ্স্থাপন নকৰাকৈ দুখন পাত যাদৃচ্ছিক ভাৱে টনা হ'ল। দুয়োখন পাত ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

-:~::~-: